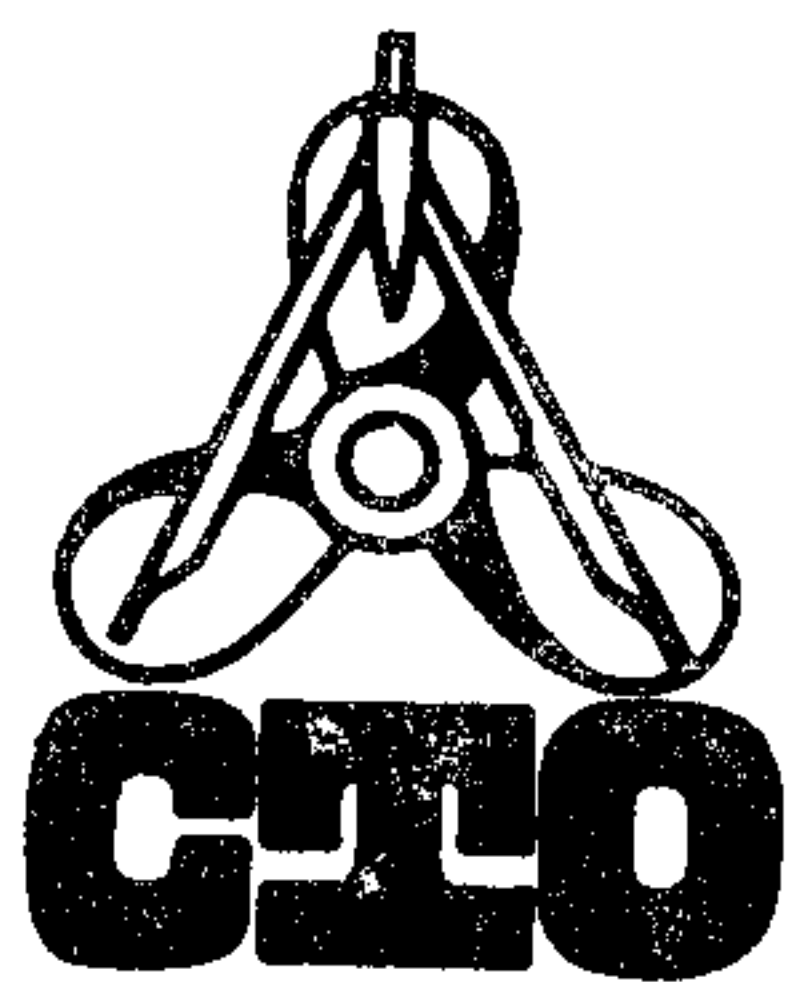
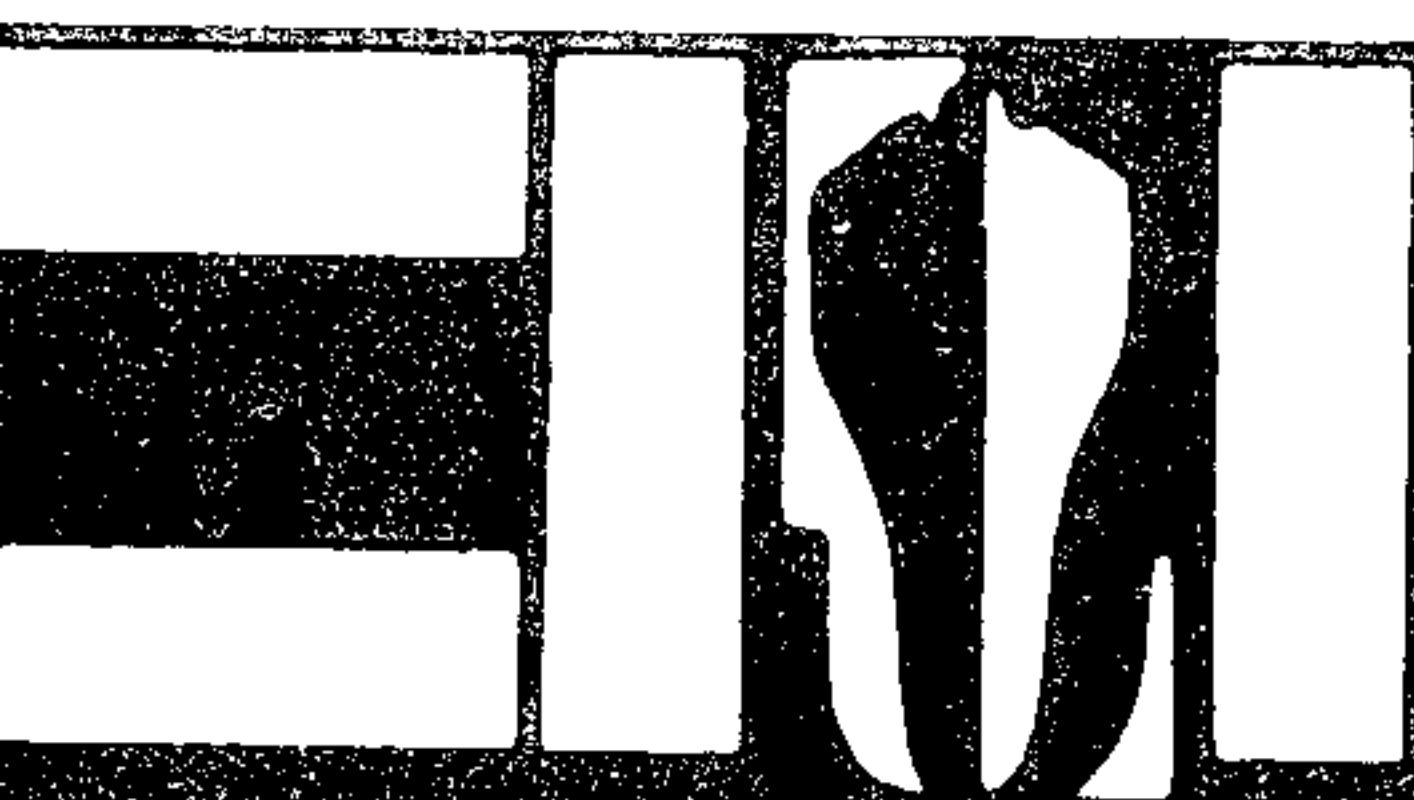




CENTRUM TECHNIKI OKRĘTOWEJ

SHIP DESIGN AND RESEARCH CENTRE
ЦЕНТР СУДОСТРОИТЕЛЬНОЙ ТЕХНИКИ



zeszyty

PROBLEMOWE

REPORTS • ТРУДЫ

B-002

L. KONIECZNY

WYTRZYMAŁOŚĆ OGÓLNA KADŁUBA
Z UWZGLĘDNIENIEM SPRĘŻENIA SKRĘCANIA I ZGINANIA POPRZECZNEGO



GDANSK

CENTRUM TECHNIKI OKRĘTOWEJ

OŚRODEK MECHANIKI KONSTRUKCJI OKRĘTU

B – 002

WYTRZYMAŁOŚĆ OGÓLNA KADŁUBA Z UWZGLĘDNIENIEM SPRZĘŻENIA SKRĘCANIA I ZGINANIA POPRZECZNEGO

PODSTAWY TEORETYCZNE

dr inż. L. Konieczny

Symbole klasyfikacji wg BKD: 31032:31034:31025:30115

GDAŃSK, LISTOPAD 1978

STRESZCZENIE

Praca zawiera algorytm obliczeń wytrzymałości ogólnej kadłuba statku z uwzględnieniem sprzężenia skręcania i zginania poprzecznego. Algorytm ten bazuje na teorii belek cienkościennych i metodzie macierzy przejścia. W macierzach przejścia przez przekrój występują człony kinematyczne i statyczne uwzględniające sprzężenie skręcania i zginania poprzecznego. Teorię prętów cienkościennych o przekroju otwartym i zamkniętym przedstawiono we współczesnym ujęciu Kollbrunnera-Hajdina. Oryginalnym wkładem autora jest wyprowadzenie odpowiednich zależności dla dowolnego biegunu P, co było niezbędne dla analizy sprzężenia skręcania i zginania poprzecznego. Ponadto podano macierze przejścia z uwzględnieniem dodatkowej deplanacji przekrojów zamkniętych od wtórnych naprężeń stycznych. Całki szczególne równań różniczkowych skręcania i zginania elementu kadłuba statku obliczane są dla ogólnego przypadku obciążeń /obciążenie trapezowe przyłożone w dowolnym miejscu na długości elementu kadłuba/.

A SHIP HULL LONGITUDINAL STRENGTH WITH THE INTERACTION BETWEEN TORSION AND HORIZONTAL BENDING

An algorithm of ship longitudinal strength calculation is given with the interaction between torsion and horizontal bending taken into account. The algorithm is based on the theory of thin walled beams and the transfer matrix approach. The cross section transfer matrices contain kinematic and static elements responsible for the interaction. The theory of thin walled beams /with open and closed cross sections/ according to the Kollbrunner and Hajdin formulation, is reviewed. Original formulae to take the interaction between torsion and horizontal bending into account have been worked out by the author for an arbitrary pole P. Finally transfer matrices are presented with additional warping due to warping shear stresses. Particular integrals of differential equations of hull torsion and bending have been found for the most general load /trapezoidal distribution of load acting on any part of hull element/.

ОБЩАЯ ПРОЧНОСТЬ СУДОВОГО КОРПУСА С УЧЕТОМ СОПРЯЖЕНИЯ МЕЖДУ КРУЧЕНИЕМ И ГОРИЗОНТАЛЬНЫМ ИЗГИБОМ

Эта работа содержит алгоритм расчётов общей прочности судового корпуса с учётом сопряжения между кручением и горизонтальным изгибом. Этот алгоритм основан на теории тонкостенных стержней и методе матриц прохода. В матрицах прохода через сечение выступают кинематические и статические члены, учитывающие сопряжения между кручением и горизонтальным изгибом.

Теория тонкостенных стержней с открытым и закрытым сечением представлена в современной работе Коллбрюннера-Хайдина. Оригинальным вкладом автора является выведение соответствующих зависимостей для произвольного полюса P, что было необходимо для анализа сопряжения между кручением и горизонтальным изгибом. Кроме того представлено матрицы прохода с учётом добавочной депланации закрытых сечений от касательных напряжений второго рода. Частные решения дифференциальных уравнений кручения и изгиба элемента судового корпуса рассчитываются для общего случая нагрузок (трапецеидальная нагрузка приложенная в произвольном месте по длине элемента корпуса).

SPIS TREŚCI

Streszczenie w języku polskim	2
Streszczenie w języku angielskim	2
Streszczenie w języku rosyjskim	2
Wstęp	5
Wykaz symboli	8
1. Teoria cienkościennych prętów o przekroju otwartym	11
2. Teoria cienkościennych prętów o przekroju zamkniętym	32
3. Teoria cienkościennych prętów o przekroju zamkniętym z uwzględnieniem wpływu dodatkowych deplanacji od wtórnych naprężeń stycznych	40
4. Zastosowanie metody macierzy przejścia do obliczeń wytrzymałości ogólnej kadłuba	47
Bibliografia	57
Załącznik A	59
Załącznik B	63
Załącznik C	65
Załącznik D	67

CONTENTS

Abstract in Polish language	2
Abstract in English language	2
Abstract in Russian language	2
Introduction	5
Index of symbols	8
1. The theory of thin-walled beams with an open cross section	11
2. The theory of thin-walled beams with a closed cross section	32
3. The theory of thin-walled beams with a closed cross section, allow- ance made for the influence of additional warpings due to secondary shear stresses	40
4. The application of the method of transfer matrices for general hull strength calculations	47
Bibliography	57
Appendix A	59
Appendix B	63
Appendix C	65
Appendix D	67

СОДЕРЖАНИЕ

Краткое содержание на польском языке	2
Краткое содержание на английском языке	2
Краткое содержание на русском языке	2
Введение	5
Перечень символов	8
1. Теория тонкостенных стержней с открытым сечением	11
2. Теория тонкостенных стержней с закрытым сечением	32
3. Теория тонкостенных стержней с закрытым сечением с учетом влияния дополнительных депланаций от касательных напряжений второго рода	40
4. Применение метода матриц прохода в расчетах общей прочности судового корпуса	47
Библиография	57
Приложение А	59
Приложение В	63
Приложение С	65
Приложение D	67

WSTĘP

W procesie projektowania konstrukcji kadłuba statku wytrzymałość ogólna była dotychczas sprawdzana głównie dla przypadku zginania w płaszczyźnie pionowej. Zginanie w płaszczyźnie poziomej oraz skręcanie było pomijane. Kontrolne obliczenia wytrzymałości na skręcanie, niezależnie od zginania w płaszczyźnie pionowej, były wykonywane tylko dla statków otwartych, takich jak kontenerowce.

Różny metod obliczeń obciążeń /np. metody obliczeń ciśnień hydrodynamicznych w oparciu o teorię pasków/ przyczynił się do udoskonalenia metody obliczeń wytrzymałości ogólnej z równoczesnym uwzględnieniem skręcania i zginania w płaszczyźnie poziomej. Praktyczne rozwiązanie tego problemu utrudnia skomplikowany kształt kadłuba /zwłaszcza zmienność kształtu w kierunku wzdłużnym/.

Zastosowanie metody elementów skończonych /MES/ umożliwia uzyskanie praktycznie dokładnego rozwiązania, wiąże się jednak z dużym nakładem pracy i kosztów, nie jest więc przydatne na wstępnym etapie projektowania konstrukcji. Rozważną alternatywą są metody przybliżonych obliczeń oparte na teorii belek cienkościennych. Zastosowanie tej metody pociąga jednak za sobą konieczność dokładnego rozważenia szeregu zagadnień. Należy do nich uwzględnienie zmienności przekroju belki cienkościennej i nieciągłości konstrukcyjnych /np. na styku części otwartej i zamkniętej kadłuba/. Konieczne jest również uwzględnienie sprzężenia zginania poprzecznego i skręcania, ponieważ środki ścinania przekrojów kadłuba nie leżą na jednej prostej. Sporo kłopotów nastrocza obliczanie charakterystyk przekrojów /np. stałej skręcania, efektywnego pola ścinania itd./ ze względu na skomplikowane kształty przekrojów kadłuba.

Istnieje wiele publikacji na temat wytrzymałości kontenerowców na skręcanie, w których autorzy próbowali praktycznie rozwiązać niektóre z przedstawionych powyżej problemów. Wspólną cechą tych prac jest to, że obliczenia skręcania traktuje się jako niezależny problem, przy czym pomija się sprzężenie zginania poprzecznego i skręcania, wynikające ze zmienności przekroju poprzecznego kadłuba. W tej grupie prac wymienić należy przede wszystkim pracę Hasluma-Tonnese [4]. Wychodząc z równania różniczkowego skręcania pręta cienkościennego /traktowanego jako niezależne od zginania/ w oparciu o metodę macierzy przejścia,

autorzy zaproponowali algorytm przybliżonych obliczeń parametrów skręcania z uwzględnieniem zmienności przekroju kadłuba i możliwych nieciągłości konstrukcyjnych. Algorytm ten znajduje szerokie zastosowanie w okrętownictwie /w dalszej części pracy będzie nazywany metodą konwencjonalną/. Dokładniejsze obliczenia /przy użyciu MES/ odkształceń i naprężeń w kadłubie kontenerowca pod obciążeniem skręcającym wykazały jednak, że metoda konwencjonalna nie zapewnia potrzebnej dokładności obliczeń /w szczególności jeżeli chodzi o odkształcenia części dziobowej przy obciążeniu skręcającym/. Nawet, gdy przekroje poprzeczne w części dziobowej nie ulegają deplanacji, cała część dziobowa ulega przemieszczeniu w kierunku poprzecznym, a odkształcony kadłub przypomina przy skręcaniu pełzającego węża /snaking/. Obserwacje te doprowadziły nawet do wniosków podważających możliwość zastosowania teorii prętów cienkościennych do obliczeń skręcania kadłubów okrętowych. Rozbieżności wyników obliczeń występujące w metodzie konwencjonalnej i MES można wyjaśnić, właśnie w oparciu o teorię belek cienkościennych. Metoda konwencjonalna traktuje bowiem skręcanie jako niezależne od zginania, co jest słuszne tylko dla pręta o stałym przekroju. W kontenerowcach, które jak wiadomo nie mają w ogóle wstawki cylindrycznej, występuje silne sprzężenie zginania poprzecznego i skręcania. Nawet w przypadku braku momentów zginających pojawiają się dodatkowe przemieszczenia poprzeczne i wzdłużne, charakterystyczne dla zginania poprzecznego, co występuje w omawianych powyżej wynikach obliczeń MES [5].

Źródła japońskie [6] podają algorytm obliczeń wytrzymałości ogólnej z uwzględnieniem sprzężenia skręcania i zginania poprzecznego. Algorytm ten również opiera się na teorii belek cienkościennych i metodzie macierzy przejścia. W macierzach przejścia przez przekrój występują jednak człony kinematyczne i statyczne, uwzględniające sprzężenie skręcania i zginania poprzecznego. Wyniki obliczeń przemieszczeń i naprężeń w kadłubie zgadzają się z wynikami badań doświadczalnych dla modelu kontenerowca bez wstawki cylindrycznej w przypadku, gdy pokład skrajników i siłowni traktowano w obliczeniach jako przewiązki poprzeczne.

W pierwszych trzech rozdziałach niniejszej pracy przedstawiono teorię prętów cienkościennych we współczesnym ujęciu Kollbrunniera-Hajdina [1], [2]. Oryginalnym wkładem autora jest wyprowadzenie odpowiednich równań dla dowolnego położenia bieguna P /w cytowanych publikacjach odpowiednie zależności podane są tylko dla środka ścinania D/. Tam, gdzie to było możliwe, porównano wyniki z monografią Własowa [3]. Ogólne sformułowanie teorii prętów cienkościennych było

niezbędne dla analizy sprzężenia skręcania i zginania poprzecznego.

W ostatnim, ostatnim rozdziale opracowano macierze przejścia, analogiczne do podanych w pracy Shimizu-Yoshima [6], oparto się jednak na zmodyfikowanej teorii skręcania prętów o przekroju zamkniętym /przedstawionej w rozdziale 3/ zamiast teorii przedstawionej w rozdziale 2, która stanowi podstawę algorytmu w pracy japońskiej [6]. Zmiana ta pozwoli zwiększyć dokładność obliczeń w przypadku, gdy pokład traktowany jest jako element zamykający przekrój /w tym przypadku algorytm japoński nie zapewniał wystarczającej dokładności obliczeń/.

W niniejszej pracy całki szczególne równań różniczkowych skręcania i zginania elementu kadłuba są obliczane dla ogólnego przypadku obciążenia kadłuba /obciążenie trapezowe przyłożone w dowolnym miejscu na długości elementu kadłuba/.

Pozwala to na wykonywanie obliczeń dla dowolnych obciążeń przy dowolnym podziale kadłuba na elementy.

Pozostaje do opracowania algorytm obliczeń naprężeń i odkształceń w kadłubie na fali regularnej o zadanych parametrach oraz algorytm obliczeń krótkoterminowej i długoterminowej prognozy odzewu kadłuba w warunkach nieregularnego falowania morskiego dla zadanego akwenu pływania.

WYKAZ SYMBOLI

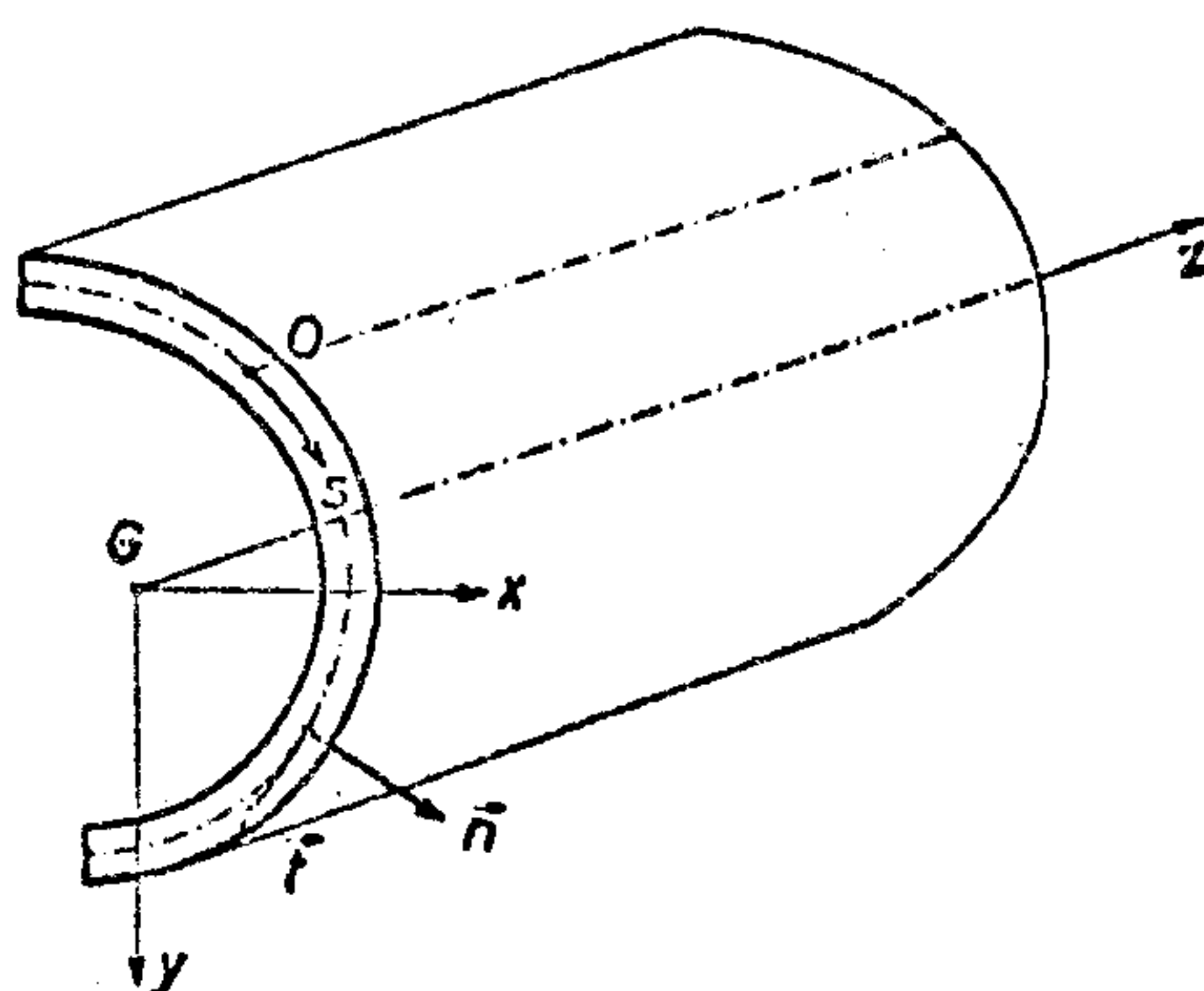
e	- odległość od powierzchni środkowej w kierunku normalnym
h	- odległość stycznej do linii środkowej profilu od osi skręcania
h_n	- odległość normalnej do linii środkowej profilu od osi skręcania
l	- długość pręta
m_D	- intensywność zewnętrznego momentu skręcającego względem środka D ścinania przekroju
m_x, m_y	- intensywność zewnętrznych momentów zginających
m_Ω	- intensywność zewnętrznego bimomentu
$\vec{n}$	- normalna do powierzchni środkowej profilu
p_x, p_y, p_z	- intensywność obciążeń zewnętrznych rozłożonych wzdłuż linii
$\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$	- intensywność powierzchniowych obciążeń zewnętrznych
r	- promień
s	- współrzędna krzywoliniowa powierzchni środkowej
t	- grubość ścianki
f	- styczna do linii środkowej profilu
u	- przemieszczenie w kierunku normalnym do powierzchni środkowej
v	- przemieszczenie w kierunku stycznym do powierzchni środkowej
w	- przemieszczenie w kierunku osi pręta
x, y	- współrzędne kartezjańskie w płaszczyźnie przekroju w kierun- kach głównych osi bezwładności
z	- współrzędna w kierunku osi pręta
G	- środek ciężkości przekroju
D	- środek ścinania przekroju
E	- moduł sprężystości
F	- powierzchnia przekroju
$\tilde{F}$	- powierzchnia odciętej części przekroju
G	- moduł odkształcenia postaciowego
$I_{xx} = \int_F x^2 dF$	- moment bezwładności względem osi y
$I_{yy} = \int_F y^2 dF$	- moment bezwładności względem osi x

- $I_{xy} = \int_F xy dF$ - moment dewiacyjny
 $I_{\omega P} = \int_F \omega^2 dF$ - wycinkowy moment bezwładności dla dowolnego bieguna P
 $I_{\Omega\Omega} = \int_F \Omega^2 dF$ - wycinkowy moment bezwładności dla unormowanych współrzędnych wycinkowych
 $I_{x\omega P} = \int_F \omega_P x dF$ - wycinkowy moment dewiacyjny
 $I_{y\omega P} = \int_F \omega_P y dF$ - wycinkowy moment dewiacyjny
 K - stała skręcania
 $M_x = \int_F \sigma x dF$ - moment zginający w płaszczyźnie x, z
 $M_y = \int_F \sigma y dF$ - moment zginający w płaszczyźnie y, z
 $M_\Omega = \int_F \sigma \Omega dF$ - bimoment
 $\bar{M}_\Omega$ - zewnętrzny bimoment skupiony
 N - siła podłużna
 O - punkt zerowy na linii środkowej profilu /punkt początkowy dla współrzędnej s /
 Q_x, Q_y - siły poprzeczne działające w kierunku x i y
 $\bar{Q}_x, \bar{Q}_y$ - zewnętrzne siły skupione działające w kierunku x i y
 $S_{\omega P}$ lub S_Ω - wycinkowe momenty statyczne
 $S_{\omega P} = \int_F \omega_P dF$
 $S_\Omega = \int_F \Omega dF = 0$
 $\tilde{S}_x, \tilde{S}_y$ - momenty statyczne odciętej części $\tilde{F}$ przekroju
 $\tilde{S}_x = \int_{\tilde{F}} x dF$; $\tilde{S}_y = \int_{\tilde{F}} y dF$
 $\tilde{S}_\Omega$ - wycinkowy moment statyczny odciętej części $\tilde{F}$ przekroju
 $\tilde{S}_\Omega = \int_{\tilde{F}} \Omega dF$
 T - moment skręcający
 $\bar{T}$ - skupiony moment skręcający zewnętrzny
 T_s - moment skręcający od czystego skręcania
 $T_{\omega P}, T_\Omega$ - giętno-skrętny moment skręcający
 α - kąt
 γ_{zs} - odkształcenie postaciowe
 $\epsilon_x, \epsilon_y, \epsilon_n$ - odkształcenia liniowe
 σ - naprężenia normalne
 τ_z, τ_s, τ_w - naprężenia styczne

- φ - kąt skręcenia przekroju pręta
- $\varphi' = \frac{d\varphi}{dz}$ - jednostkowy kąt skręcenia
- ω_P - współrzędna wycinkowa względem dowolnego punktu P
- Ω - unormowana współrzędna wycinkowa
- q - strumień naprężeń stycznych
- $\left. \begin{aligned} q_w &= t\tau_w \\ q_w &= (t\tau_w)_0 \end{aligned} \right\}$ - strumienie wtórnych naprężeń stycznych dla przekroju zamkniętego
- $\nu = \nu(z)$ - współczynnik deplanacji przekroju
- A, A_i - pole powierzchni zawarte wewnątrz linii środkowej profilu zamkniętego
- $\rho = \frac{I_{hh}}{I_{hh} - K}$ - współczynnik uwzględniający wpływ naprężeń τ_w na deplanację
- $I_{hh} = \int_F h^2 dF$ - biegunowy moment bezwładności
- l_n - długość elementu kadłuba o numerze n
- e_n - współrzędna środka ścinania przekroju elementu względem płaszczyzny podstawowej /dodatnia, gdy poniżej płaszczyzny podstawowej/
- c_n - współrzędna środka ciężkości przekroju elementu względem płaszczyzny podstawowej /dodatnia, gdy powyżej płaszczyzny podstawowej/
- $y_D = e_n + c_n$
- D - wysokość kadłuba
- χ - kąt obrotu przekroju kadłuba w płaszczyźnie $y z$
- ψ - kąt obrotu przekroju kadłuba w płaszczyźnie $x z$
- ξ, η, ζ - przemieszczenie środka ścinania przekroju w kierunku osi x, y i z odpowiednio
- $A_x^{(n)}$ - efektywne pole ścinania przekroju elementu kadłuba o numerze n w płaszczyźnie $x z$
- $A_y^{(n)}$ - efektywne pole ścinania przekroju elementu kadłuba o numerze n w płaszczyźnie $y z$

1. TEORIA CIENKOŚCIENNYCH PRĘTÓW O PRZEKROJU OTWARTYM

Analizuje się cienkościenny pręt o stałym, dowolnym przekroju otwartym /rys. 1.1/. Dla uproszczenia przyjęto oś z kartezjańskiego układu współrzędnych przechodzącą przez środek ciężkości przekroju, zaś osie x i y tak dobrano, że pokrywają się z głównymi osiami bezwładności przekroju.



Rys. 1.1

Teoria opiera się na następujących założeniach dotyczących odkształcania pręta:

- a/ przekrój poprzeczny pozostaje niezmienny w trakcie odkształcania pręta;
- b/ pomija się odkształcenia postaciowe powierzchni środkowej pręta.

Położenie dowolnego punktu powierzchni środkowej określa się za pomocą współrzędnych s i z . Współrzędna s jest długością linii środkowej profilu, mierzoną względem pewnej /z góry określonej/ tworzącej powierzchni środkowej. Punkt O przecięcia tej tworzącej z linią środkową profilu oznacza się jako punkt zerowy linii środkowej profilu.

Przemieszczenia punktów linii środkowej profilu w kierunku stycznym $\vec{t}$ oznacza się przez v , w kierunku normalnym $\vec{n}$ - przez u oraz w kierunku $\vec{z}$ - przez w . Przemieszczenia w kierunku osi x i y oznacza się przez ξ i η odpowiednio. Pomijając odkształcenia postaciowe powierzchni środkowej pręta, otrzymuje się:

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = 0 \quad /1.1/$$

skąd

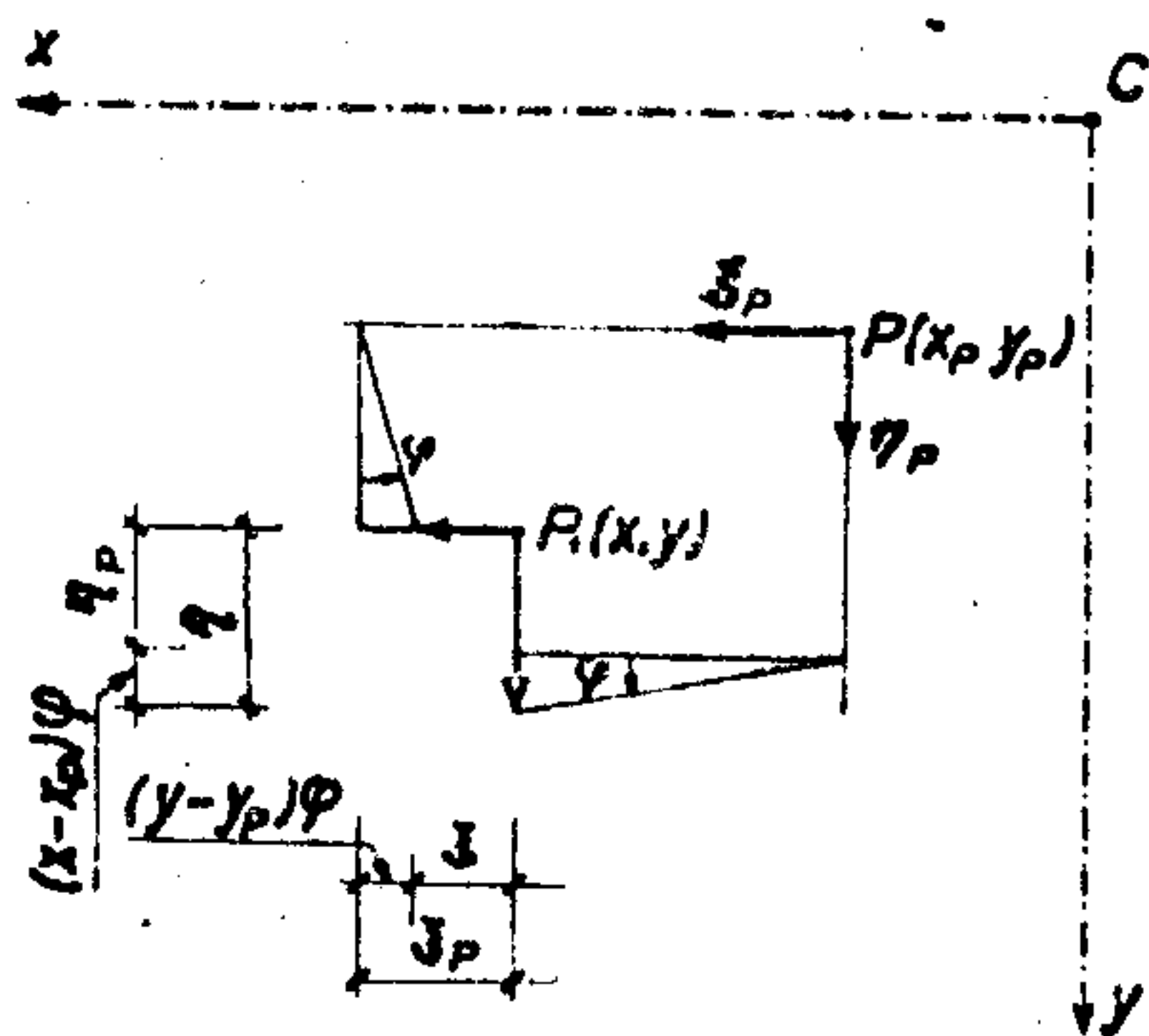
$$\frac{\partial w}{\partial s} = - \frac{\partial v}{\partial z} \quad /1.2/$$

$$w(s, z) = - \int_z^s \frac{\partial v}{\partial z} ds + w_0(z) \quad /1.3/$$

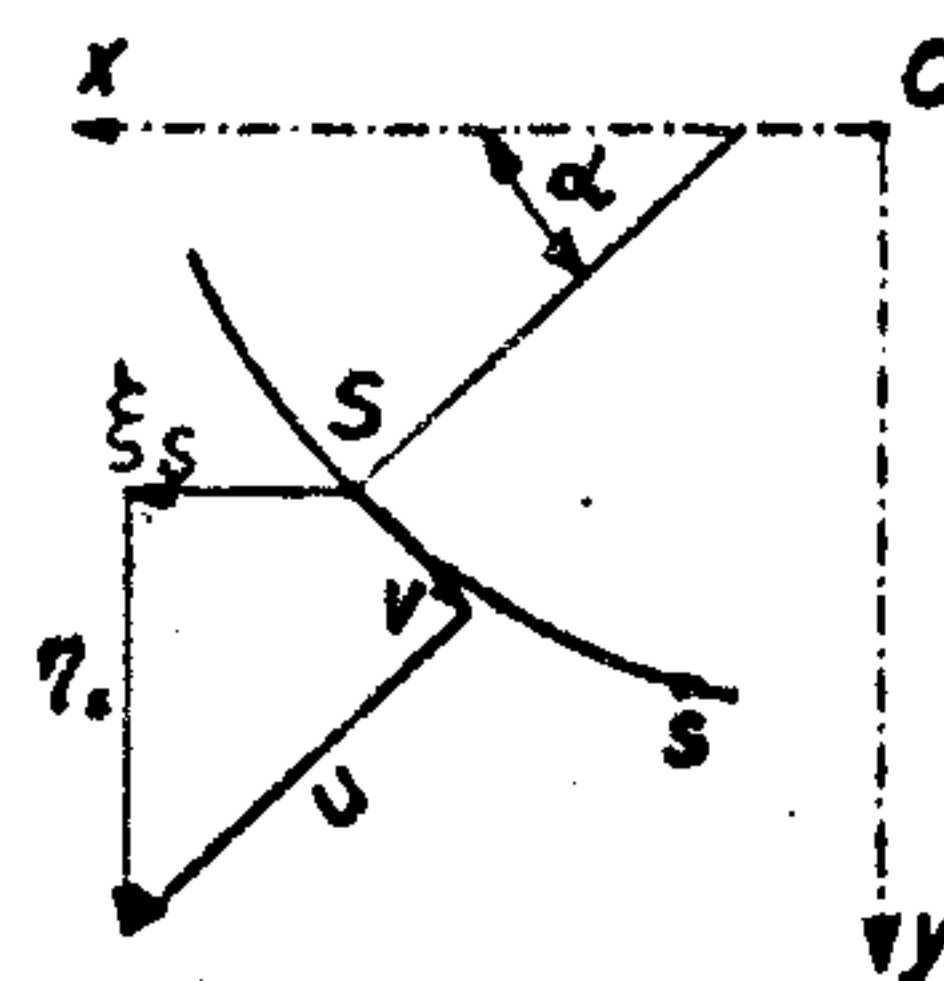
gdzie w_0 jest funkcją całkowania, zależną od z .

Przyjmując założenie, że przekrój poprzeczny pozostaje niezmienny w trakcie odkształcania pręta, przemieszczenia punktów tego przekroju mogą być opisane przez następujące parametry: przemieszczenia ξ_P i η_P dowolnie wybranego punktu P o współrzędnych x_P i y_P oraz kąt skręcenia φ przekroju względem tego punktu. Punkt P nazywa się biegunem. Składowe przemieszczenia ξ i η punktu P_1 o współrzędnych x i y określone są przez zależności wynikające z rys. 1.2.

$$\begin{aligned} \xi &= \xi_P - (y - y_P) \varphi \\ \eta &= \eta_P + (x - x_P) \varphi \end{aligned} \quad /1.4/$$



Rys. 1.2



Rys. 1.3

Przemieszczenia przekroju w swojej płaszczyźnie mogą być interpretowane jako obrót względem nieruchomego punktu D . Współrzędne tego punktu można otrzymać z równań /1.4/ przez przyrównanie do zera przemieszczeń ξ i η

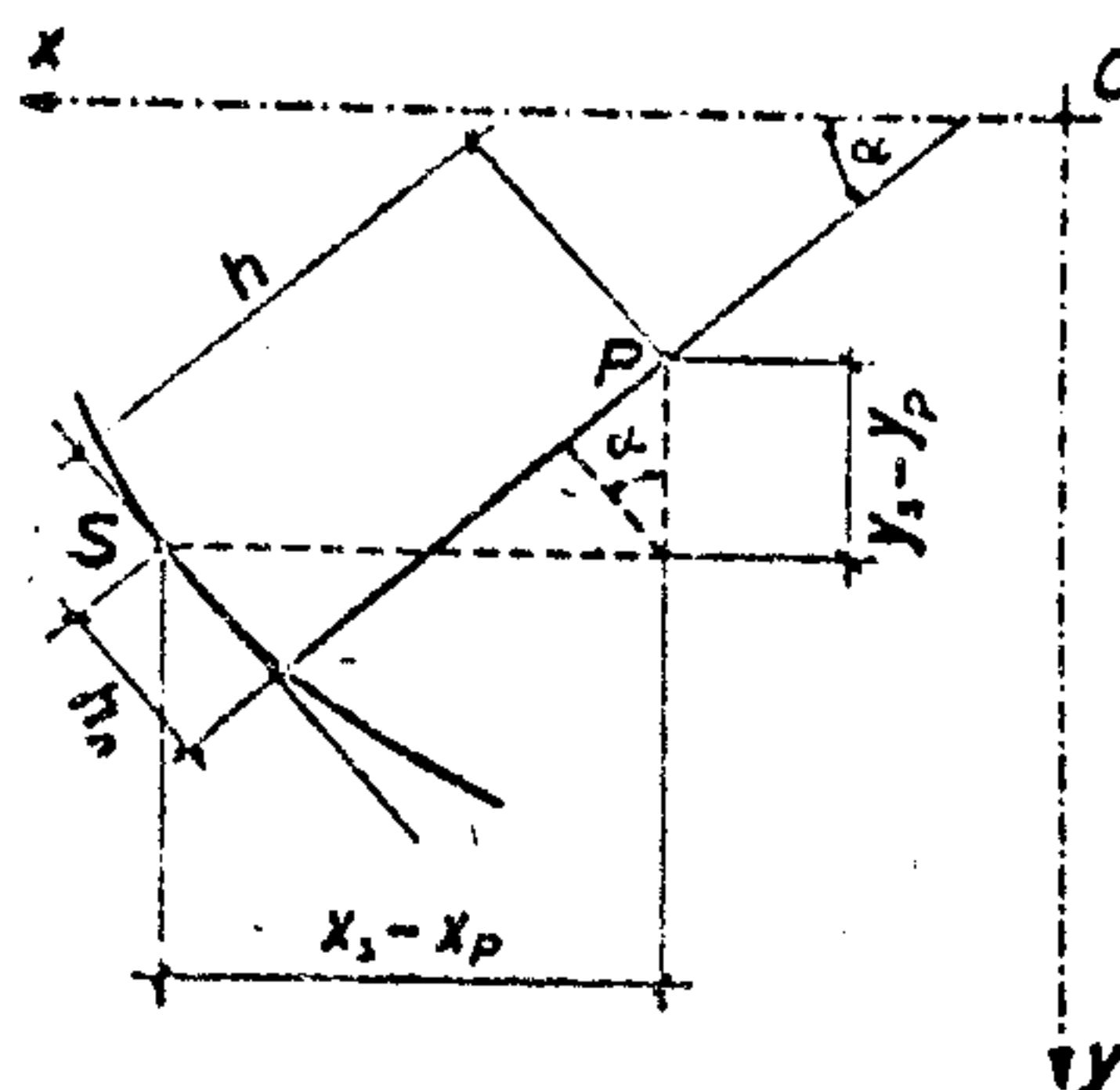
$$\begin{aligned} x_D &= x_P - \frac{\eta_P}{\varphi} \\ y_D &= y_P - \frac{\xi_P}{\varphi} \end{aligned}$$

Przemieszczenia $u(s, z)$ i $v(s, z)$ punktu powierzchni środkowej są rzutami przemieszczeń ξ_s i η_s na kierunek normalny i styczny do linii środkowej profilu /rys. 1.3/

$$u(s, z) = \eta_s \sin \alpha + \xi_s \cos \alpha$$

$$v(s, z) = \eta_s \cos \alpha - \xi_s \sin \alpha$$

gdzie α jest kątem między kierunkiem normalnym a osią x .



Rys. 1.4.

Po podstawieniu za ξ_s i η_s /wg rys. 1.4/ otrzymuje się

$$u(s, z) = \eta_p \sin \alpha + \xi_p \cos \alpha + \varphi [(x_s - x_p) \sin \alpha - (y_s - y_p) \cos \alpha] \quad /1.8/$$

$$v(s, z) = \eta_p \cos \alpha - \xi_p \sin \alpha + \varphi [(x_s - x_p) \cos \alpha + (y_s - y_p) \sin \alpha] \quad /1.9/$$

Wyrażenie w nawiasach kwadratowych w /1.8/ stanowi odległość h_n normalnej, zaś wyrażenie w nawiasach kwadratowych w /1.9/ - odległość h stycznej od punktu P do punktu S linii środkowej profilu /rys. 1.4/. Wyrażenia /1.8/ i /1.9/ można więc przedstawić w następującej formie

$$u = \eta_p \sin \alpha + \xi_p \cos \alpha + \varphi h_n \quad /1.10/$$

$$v = \eta_p \cos \alpha - \xi_p \sin \alpha + \varphi h \quad /1.11/$$

Po podstawieniu wyrażenia /1.11/ do /1.3/ otrzymuje się

$$w(z, s) = - \int_0^s (\eta_p' \cos \alpha - \xi_p' \sin \alpha + \varphi' h) ds + w_0(z) \quad /1.12/$$

Kreski u góry oznaczają różniczkowanie po z .

Biorąc pod uwagę, że

$$-\frac{dx}{ds} = \sin \alpha \quad \text{oraz} \quad \frac{dy}{ds} = \cos \alpha$$

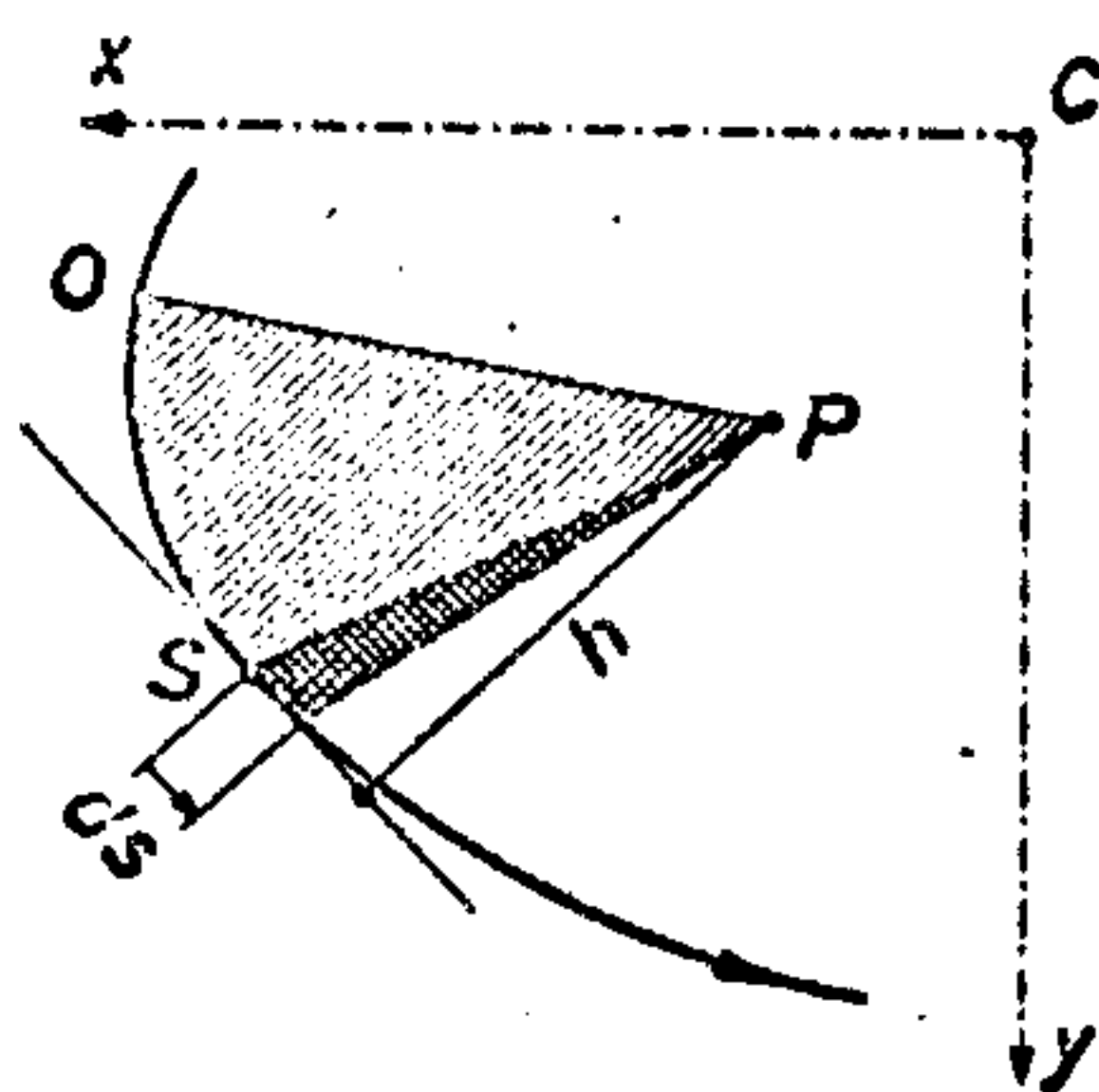
otrzymuje się ostatecznie /po wykonaniu całkowania/

$$w(s, z) = w_0 - \eta'_p y - \xi'_p x - \varphi' \omega_p \quad /1.13/$$

gdzie

$$\omega_p = \int_0^s h_p ds = \int_0^s d\omega_p \quad /1.14/$$

Ostatni człon w wyrażeniu /1.13/ stanowi tzw. deplanację przekroju. Funkcja $\omega_p = \omega_p(s)$ określająca deplanację, nazywana jest jednostkową deplanacją, a jej wartość ma wymiar powierzchni i zależy od geometrii przekroju. Wielkość $h ds = d\omega$ jest podwójnym polem elementarnego trójkąta przedstawionego na rys. 1.5.



Rys. 1.5

Jednostkowa deplanacja $\omega_p(s)$ jest podwójnym polem wycinka wzdłuż krzywej od punktu O do dowolnego punktu S . Na tej podstawie jednostkowa deplanacja jest również nazywana współrzędną wycinkową. Jeżeli odłożyć te wartości jako rzędne od linii środkowej profilu, otrzymuje się wykres jednostkowej deplanacji. Wykres ten zależy zarówno od wyboru punktu P , względem którego obliczane są przemieszczenia ξ_p i η_p , jak również od wyboru punktu zerowego O linii środkowej profilu, od którego rozpoczyna się całkowanie.

Z zależności /1.13/ wynika, że przemieszczenia punktów powierzchni środkowej w kierunku osi z są określone przez cztery funkcje: w_0 , ξ_p , η_p oraz φ , które zależą od zmiennej z .

Odkształcenie ε_z w punkcie powierzchni środkowej w kierunku osi z oblicza się zgodnie z wzorem:

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z}$$

Z zależności /1.13/ wynika, że

$$\varepsilon_z = w'_0 - \eta''_p y - \xi''_p x - \varphi'' \omega_p \quad /1.15/$$

Odkształcenia ε_s i ε_n w kierunku stycznej i normalnej do linii środkowej profilu są równe zero ze względu na założenie a/

$$\varepsilon_s = \varepsilon_n = 0 \quad /1.16/$$

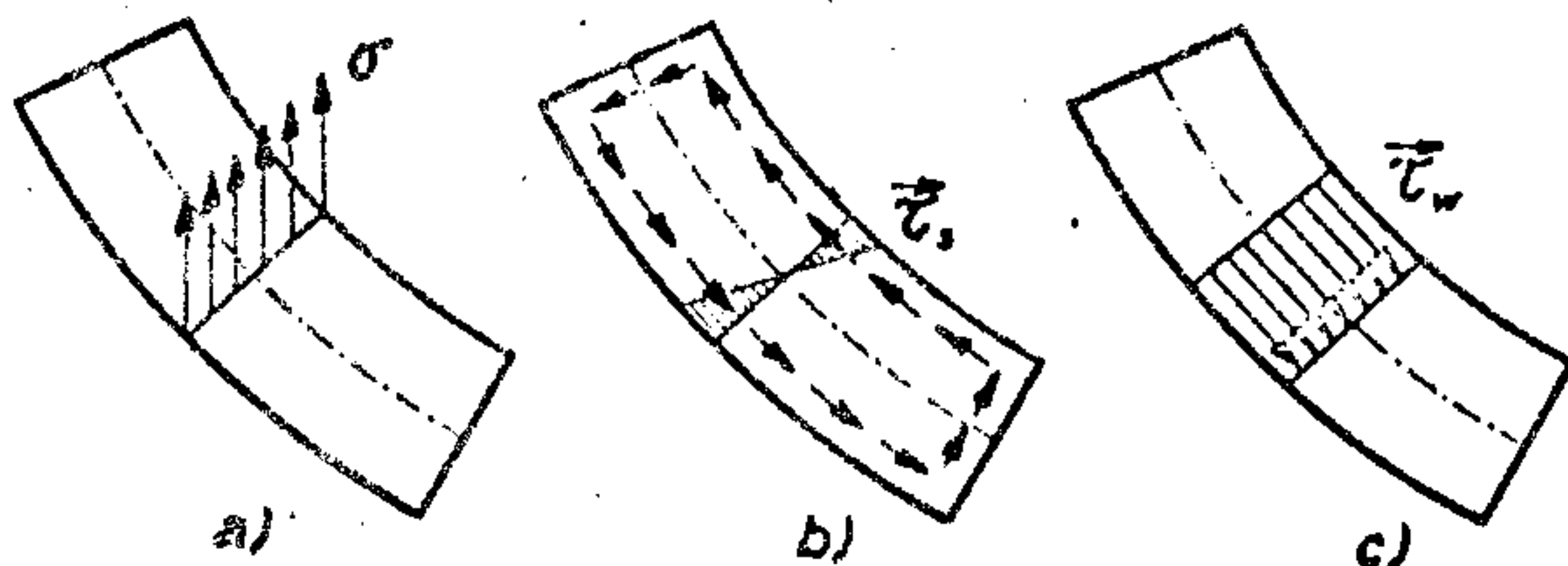
W obliczeniach naprężeń normalnych i stycznych przyjmuje się dodatkowo następujące założenia:

c/ naprężenia normalne $\sigma_z = \sigma$ są rozłożone równomiernie na grubości ścianki /rys. 1.6a/;

d/ naprężenia styczne τ_z są przedstawione jako suma wektorowa naprężeń τ_s i τ_w , tj.

$$\tau_z = \tau_s + \tau_w$$

Zakłada się identyczny rozkład naprężeń stycznych τ_s w przekroju jak w przypadku czystego skręcania /rys. 1.6b/. Ze względu na znikomą grubość ścianek, naprężenia te są równoległe do linii środkowej profilu i równomiernie rozłożone w przekroju. Naprężenia τ_w są równomiernie rozłożone na grubości ścianki i równoległe do linii środkowej profilu.



Rys. 1.6

Znając składowe naprężenia można obliczyć siły wewnętrzne w przekroju

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma dF \\ M_x &= \int_F \sigma x dF \\ M_y &= \int_F \sigma y dF \end{aligned} \quad /1.17/$$

gdzie N jest to siła podłużna, M_x - moment zginający wokół osi y , M_y - moment zginający wokół osi x . Osie x i y , jak założono na wstępie, są głównymi osiami bezwładności przekroju.

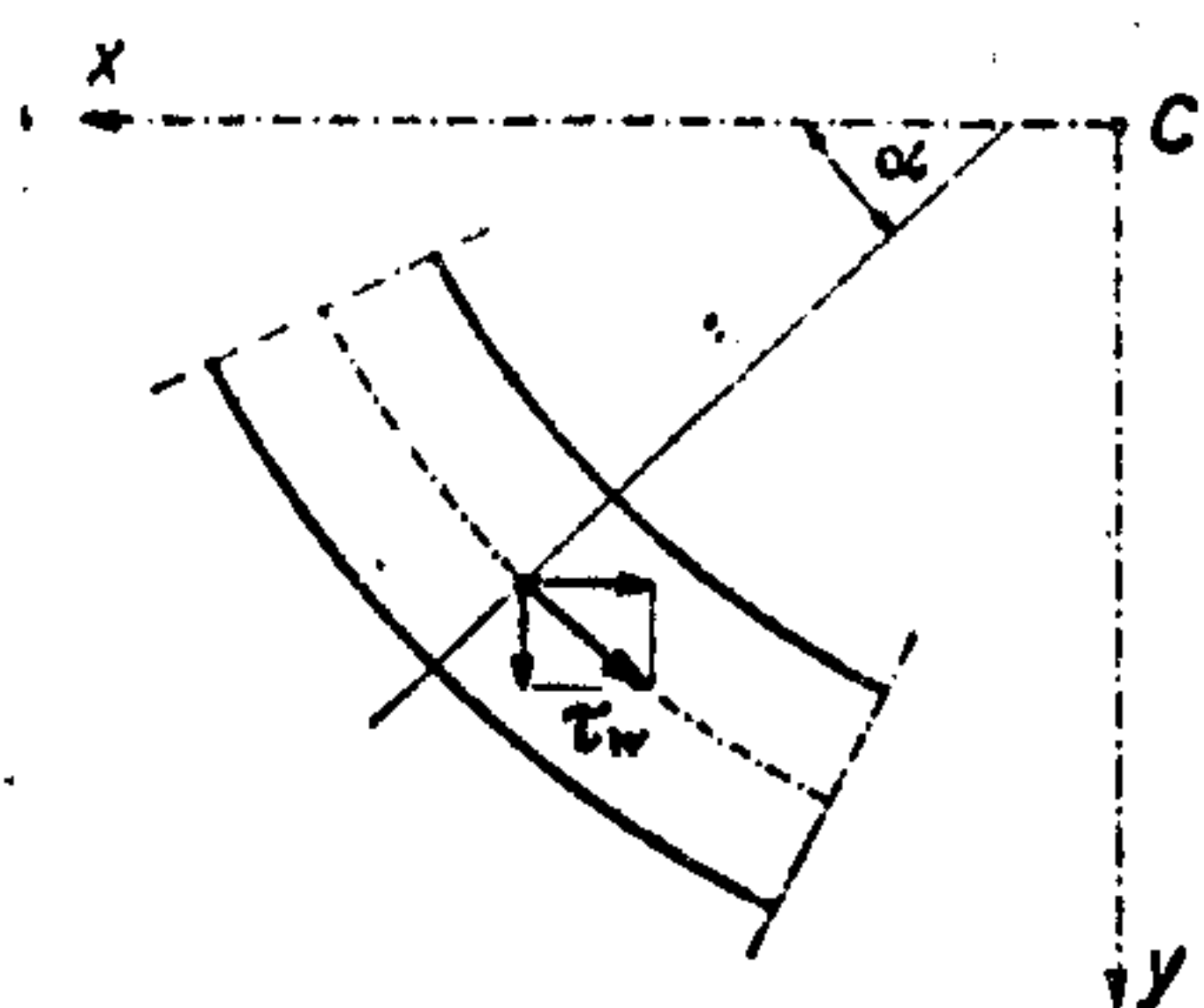
Siły poprzeczne Q_x względnie Q_y można wyrazić jako rzut wypadkowej siły wewnętrznej na kierunek x względnie y . Ponieważ naprężenia τ_s w płasz-

czyżnie przekroju z założenia sprowadzają się do wypadkowego momentu, nie mają one wpływu na siłę poprzeczną, która jest określona wyłącznie przez naprężenia τ_w /rys. 1.7/

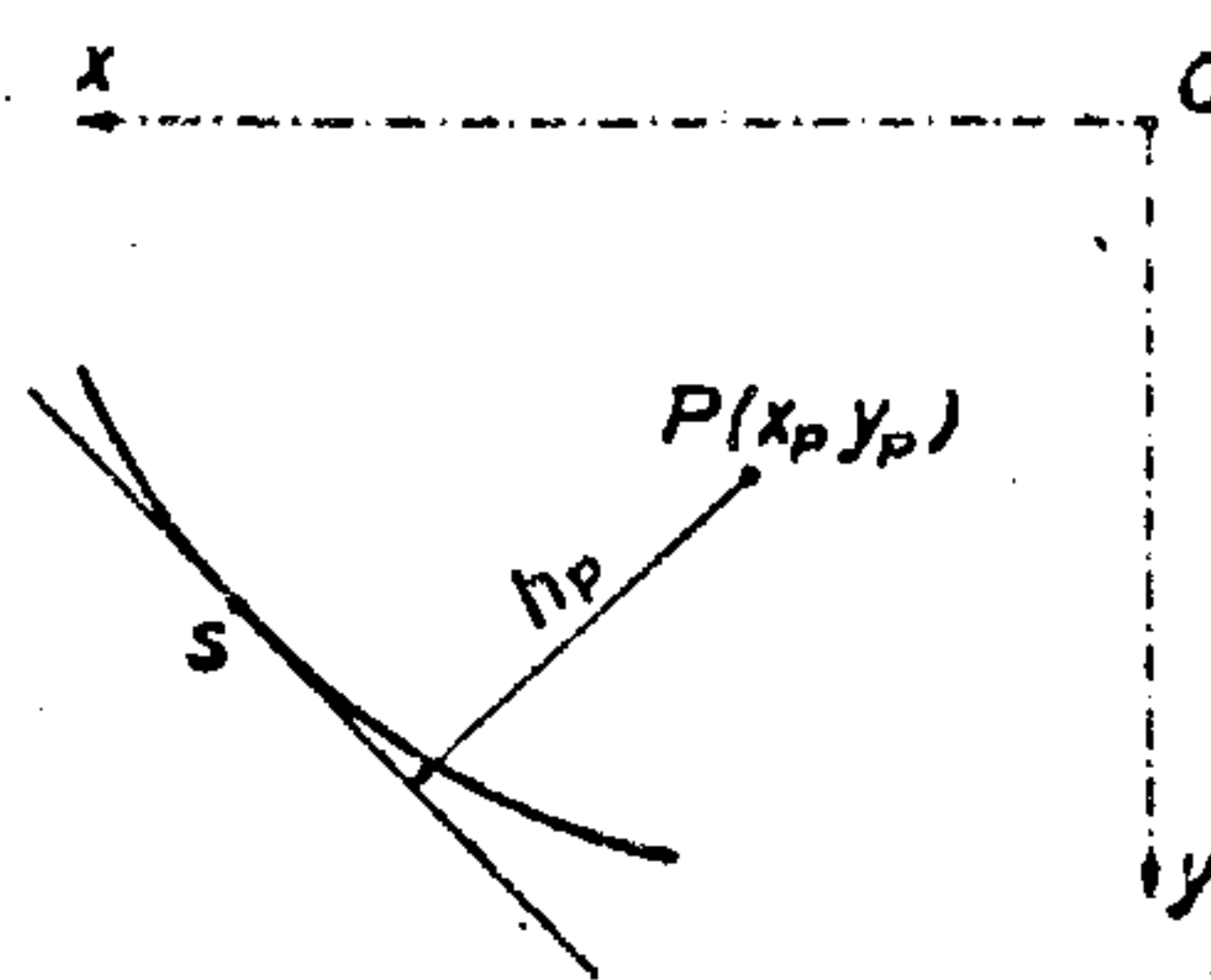
$$Q_x = - \int_F \tau_w \sin \alpha dF = \int_F t \tau_w dx \quad /1.18a/$$

$$Q_y = \int_S \tau_w \cos \alpha dF = \int_S t \tau_w dy \quad /1.18b/$$

gdzie $dF = t ds$



Rys. 1.7



Rys. 1.8

Całki powierzchniowe są obliczane dla całego pola przekroju, zaś całki krzywoliniowe - dla całkowitej długości linii środkowej profilu. Iloczyn $\tau_w t$ jest zwykle nazywany strumieniem naprężeń stycznych i oznaczany przez q . Równania /1.18/ można przedstawić w postaci

$$Q_x = \int_S q dx \quad /1.19/$$

$$Q_y = \int_S q dy' \quad /1.20/$$

Przy obliczaniu momentu skręcającego wybiera się punkt odniesienia P , względem którego są określone przemieszczenia punktów przekroju /w ogólnym przypadku punkt ten nie pokrywa się ze środkiem ciężkości przekroju/. W ten sposób otrzymuje się /rys. 1.8/

$$T_p = T_s + \int_S h_p q ds \quad /1.21/$$

gdzie T_s jest wypadkowym momentem pochodzącym od naprężeń τ_s , a h_p jest, jak podano uprzednio, odległością stycznej do linii środkowej profilu od punktu P . Uwzględniając, że $h_p ds = d\omega_p$ możemy zapisać

$$T_p = T_s + \int_S q d\omega_p$$

lub

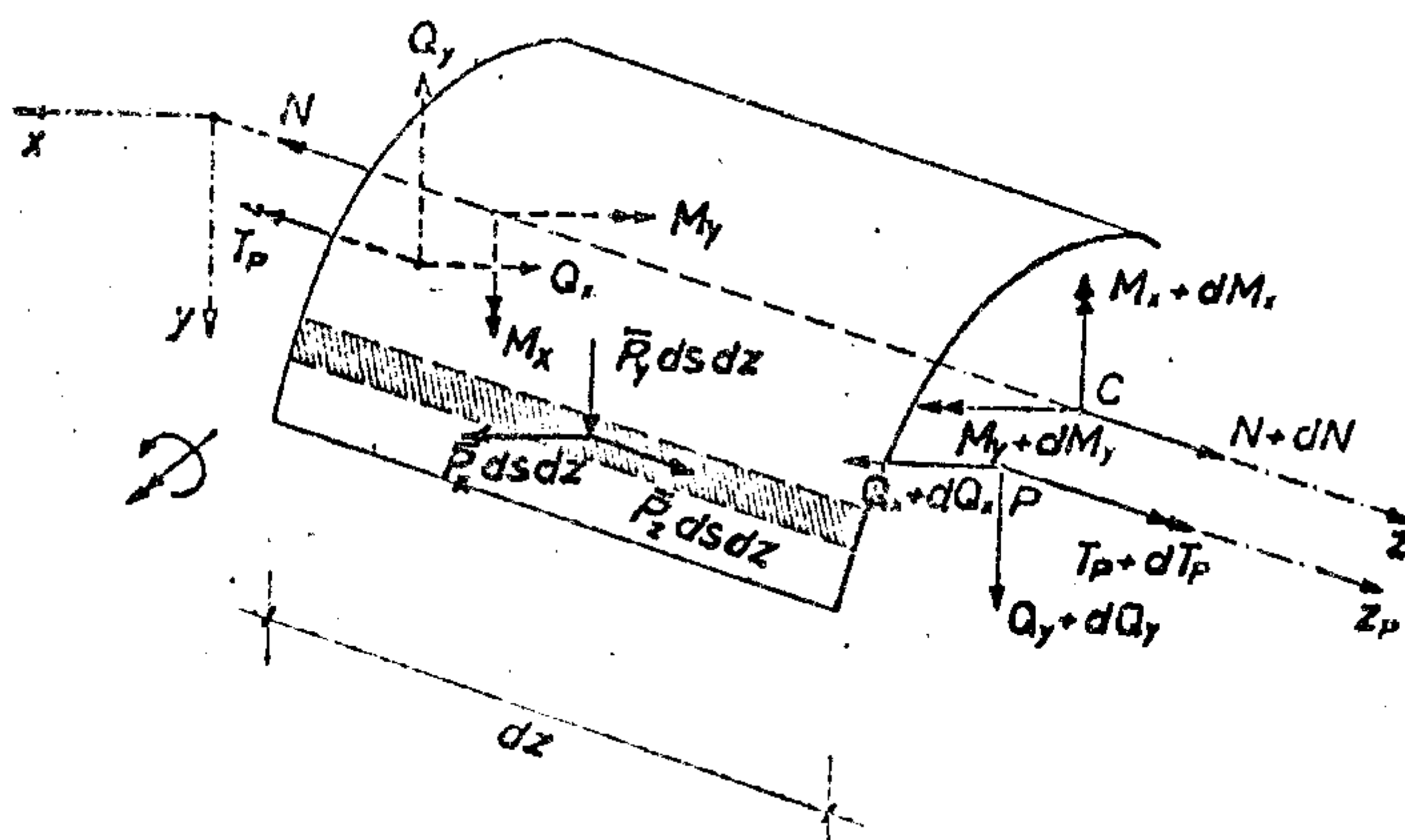
$$T_p = T_s + T_{wp} \quad /1.22/$$

gdzie

$$T_{wp} = \int_S \tau_w t h_p ds = \int_S q d\omega_p \quad /1.23/$$

T_s nazywa się momentem skręcającym Saint-Venanta /moment przy czystym skręcaniu/, zaś T_{wp} momentem giętno-skrętnym /moment przy skręcaniu skrępowanym/.

Zależność między obciążeniem i siłami wewnętrznymi otrzymuje się z warunków równowagi sił działających na element pręta /rys. 1.9/.



Rys. 1.9

Rzuty obciążenia $\vec{p}$ /działającego w płaszczyźnie środkowej elementu w kierunkach x, y, z / oznaczają się przez $\vec{p}_x(s, z)$, $\vec{p}_y(s, z)$ i $\vec{p}_z(s, z)$. Po pominięciu wielkości małych wyższego rzędu, sześć warunków równowagi ciała w przestrzeni można zapisać w postaci następującego układu równań

$$dQ_x + dz \int_S \vec{p}_x ds = 0 \quad /1.24a/$$

$$dQ_y + dz \int_S \vec{p}_y ds = 0 \quad /1.24b/$$

$$dN_z + dz \int_S \vec{p}_z ds = 0 \quad /1.24c/$$

$$dM_x - Q_x dz + dz \int_S \vec{p}_z x ds = 0 \quad /1.24d/$$

$$dM_y - Q_y dz + dz \int_S \vec{p}_z y ds = 0 \quad /1.24e/$$

$$dT - dz \int_S \vec{p}_x (y - y_p) ds + dz \int_S \vec{p}_y (x - x_p) ds = 0 \quad /1.24f/$$

Wprowadzając wypadkowe obciążenia powierzchniowych $\bar{p}_x, \bar{p}_y, \bar{p}_z$, na jednostkę długości pręta

$$p_x = \int_S \bar{p}_x ds \quad /1.25a/$$

$$p_y = \int_S \bar{p}_y ds \quad /1.25b/$$

$$p_z = \int_S \bar{p}_z ds \quad /1.25c/$$

oraz momenty jednostkowe /na jednostkę długości pręta/ od tych obciążeń względem osi y, x oraz z_p

$$m_x = \int_S \bar{p}_z x ds \quad /1.26a/$$

$$m_y = \int_S \bar{p}_z y ds \quad /1.26b/$$

$$m_p = \int_S \bar{p}_y (x - x_p) ds - \int_S \bar{p}_x (y - y_p) ds \quad /1.26c/$$

otrzymuje się

$$Q'_x = -p_x \quad /1.27a/$$

$$Q'_y = -p_y \quad /1.27b/$$

$$N' = -p_z \quad /1.27c/$$

$$M'_x = Q'_x - m_x \quad /1.28a/$$

$$M'_y = Q'_y - m_y \quad /1.28b/$$

$$T'_p = T'_s + T'_{\omega p} = -m_p \quad /1.28c/$$

Przy pominięciu kwadratu współczynnika Poissona /jako wielkości małej wobec jedności/ otrzymuje się

$$\sigma = E \varepsilon_z \quad /1.29/$$

względnie

$$\sigma = E (w'_0 - \eta''_p y - \xi''_p x - \psi''_{\omega p}) \quad /1.30/$$

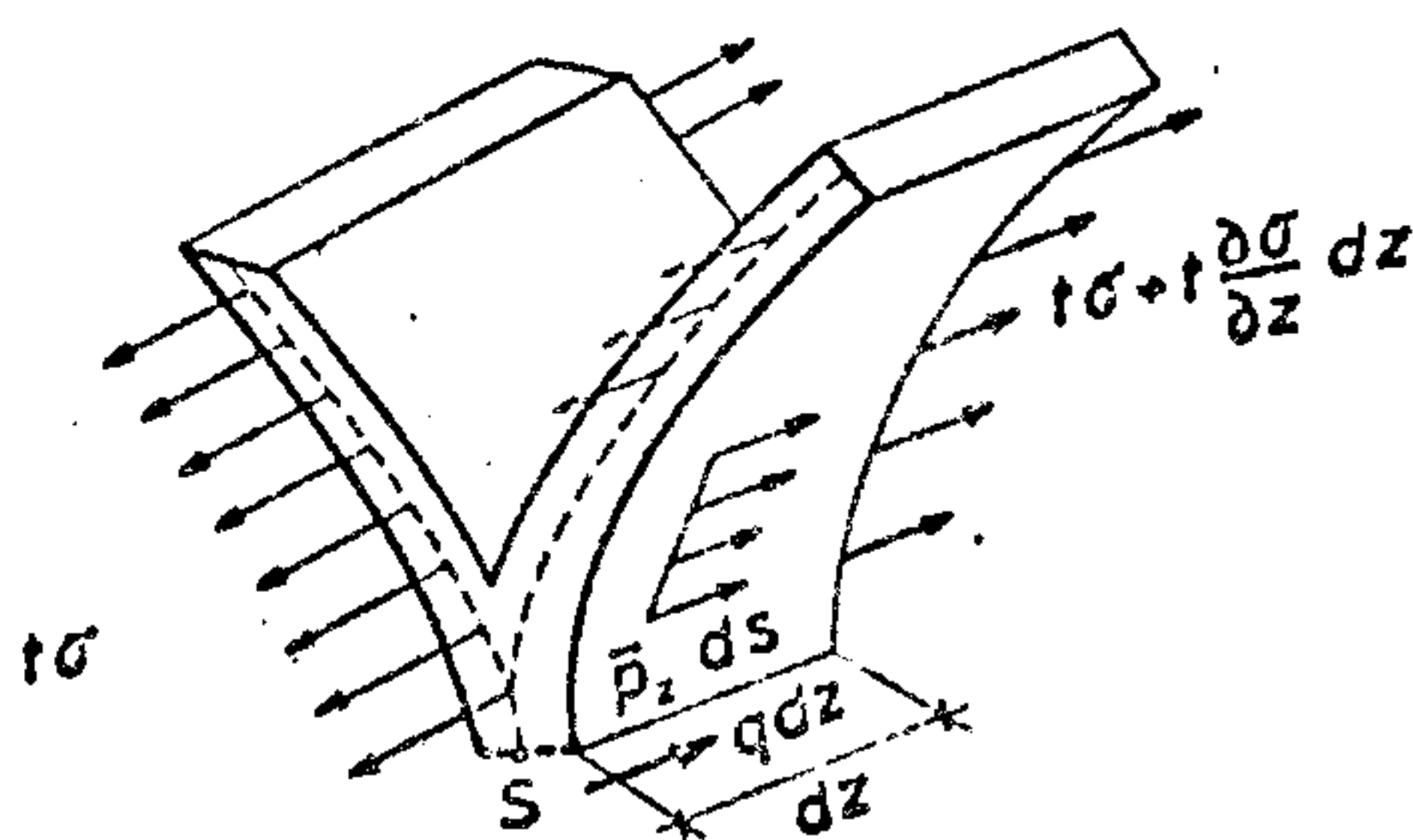
jeżeli podstawić za ε_z wyrażenie /1.15/.

Naprężenia styczne τ_s , tak samo jak przy czystym skręcaniu, są określone przez pochodną kąta skręcenia pręta /kąt skręcenia na jednostkę długości/. Z wyjątkiem końców linii środkowej profilu, obowiązuje formuła

$$\tau_s = 2 \eta G \varphi' e \quad /1.31/$$

gdzie η jest tzw. współczynnikiem korekcyjnym, e jest odległością rozpatrywanego punktu od powierzchni środkowej w kierunku normalnej $\bar{n}$.

Naprężenia styczne τ_w nie mogą być określone przez odkształcenia postaciowe, gdyż przyjęto założenie, że te odkształcenia pomijają się. Dla określenia naprężeń stycznych τ_w rozważa się element leżący między dwiema płaszczyznami prostopadłymi do osi pręta /leżącymi w odległości dz / oraz płaszczyzną równoległą do osi pręta przechodzącą przez punkt S linii środkowej profilu, w którym oblicza się naprężenia τ_w /rys. 1.10/.



Rys. 1.10

Z warunku równowagi wszystkich sił działających na wycięty element w kierunku z otrzymuje się

$$q(s, z) = t \tau_w = - \int_{\tilde{F}} \frac{\partial \sigma}{\partial z} dF - \int_{\tilde{S}} \bar{p}_z ds \quad /1.32/$$

gdzie przez $\tilde{F}$ oznaczono odciętą część przekroju, a przez $\tilde{S}$ długość linii środkowej odciętej części przekroju. Po podstawieniu wyrażenia /1.30/ za naprężenia σ otrzymuje się

$$\tau_w = \frac{E}{t} \left[-w_0'' \tilde{F} + \xi_p''' \tilde{S}_x + \eta_p''' \tilde{S}_y + \varphi''' \tilde{S}_\omega \right] - \frac{1}{t} \int_{\tilde{S}} \bar{p}_z ds \quad /1.33/$$

gdzie $\tilde{S}_x$ i $\tilde{S}_y$ są momentami statycznymi odciętej części przekroju względem osi y i x , zaś $\tilde{S}_\omega$ jest statycznym momentem wycinkowym odciętej części przekroju.

$$\begin{aligned}\tilde{F} &= \int_{\tilde{F}} dF = \int_{S_K} \tilde{s} t ds \\ \tilde{S}_x &= \int_{\tilde{F}} x dF = \int_{S_K} x \tilde{s} t ds \\ \tilde{S}_y &= \int_{\tilde{F}} y dF = \int_{S_K} y \tilde{s} t ds \\ \tilde{S}_\omega &= \int_{\tilde{F}} \omega dF = \int_{S_K} \omega \tilde{s} t ds\end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę zależność /1.33/, można wyrazić siły wewnętrzne Q_x, Q_y i $T_{\omega p}$ przez przemieszczenia ξ i η oraz kąt skręcenia φ . Przedtem jednak celowe jest przekształcenie wyrażeń /1.18/ oraz /1.23/, do postaci bardziej dogodnej do dalszych obliczeń. Po wykonaniu całkowania przez części otrzymuje się

$$\begin{aligned}Q_x &= \int_{S_K}^{S_L} t \tau_w dx = [x(t \tau_w)]_{S_K}^{S_L} - \int_{S_K}^{S_L} x d(t \tau_w) \\ Q_y &= \int_{S_K}^{S_L} t \tau_w dy = [y(t \tau_w)]_{S_K}^{S_L} - \int_{S_K}^{S_L} y dx (t \tau_w) \\ T_{\omega p} &= \int_{S_K}^{S_L} t \tau_w d\omega_p = [\omega_p(t \tau_w)]_{S_K}^{S_L} - \int_{S_K}^{S_L} \omega_p d(t \tau_w)\end{aligned}$$

Dalej zakładać się będzie, że swobodne brzegi wzdłużne /wzdłuż osi z / nie są obciążone zewnętrznymi siłami stycznymi, co eliminuje wyrażenia w nawiasach kwadratowych. Uwzględniając wyrażenie /1.33/ otrzymuje się poszukiwane zależności

$$Q_x = -E \left(\xi_p''' \int_F x^2 dF + \varphi''' \int_F x \omega_p dF \right) + m_x \quad /1.34a/$$

$$Q_y = -E \left(\eta_p''' \int_F y dF + \varphi''' \int_F y \omega_p dF \right) + m_y \quad /1.34b/$$

$$\begin{aligned}T_{\omega p} &= -E \left(\varphi''' \int_F \omega_p^2 dF + \xi_p''' \int_F x \omega_p dF + \right. \\ &\quad \left. + \eta_p''' \int_F y \omega_p dF - \omega_o'' \int_F \omega_p dF \right) + \int_{S_K}^{S_L} \bar{p}_z \omega_p ds \quad /1.34c/\end{aligned}$$

Zależność między momentem skręcającym T_S i kątem φ jest taka sama, jak przy czystym skręcaniu

$$T_S = GK \varphi' \quad /1.35/$$

gdzie K jest stałą skręcania, którą dla profili otwartych określa się według wzoru

$$K = \frac{\pi}{3} \sum_i b_i t_i^3 \quad /1.36/$$

Wielkości b_i są to długości poszczególnych odcinków linii środkowej profilu, zaś t_i - grubości ścianki tych odcinków.

Podstawiając wyrażenie /1.30/ na naprężenia normalne do wyrażenia /1.17/ można określić siły wewnętrzne N_z, M_x, M_y przez odkształcenia pręta

$$N_z = E \left(w_0' \int_F dF - \varphi'' \int_F \omega_p dF \right)$$

$$M_x = -E \left(\xi_p'' \int_F x^2 dF + \varphi'' \int_F \omega_p x dF \right) \quad /1.37a-c/$$

$$M_y = -E \left(\eta_p'' \int_F y^2 dF + \varphi'' \int_F \omega_p y dF \right)$$

W wyrażeniach /1.34/ i /1.37/ całki oznaczone

$$\int_F dF = F \quad \int_F x^2 dF = I_{xx} \quad \int_F y^2 dF = I_{yy}$$

są znanymi charakterystykami przekroju, a mianowicie: polem powierzchni i momentami bezwładności względem głównych osi.

Całki

$$\int_F \omega_p dF = S_{\omega p} \quad /1.38a/$$

$$\int_F \omega_p x dF = I_{x\omega p} \quad /1.38b/$$

$$\int_F \omega_p y dF = I_{y\omega p} \quad /1.38c/$$

$$\int_F \omega_p dF = I_{\omega\omega p} \quad /1.38d/$$

są określone przez współrzędne wycinkowe ω_p przekroju. Wielkości te zależą od wyboru punktu P o współrzędnych x_p, y_p , względem którego oblicza się ramię h_p w wyrażeniu

$$\omega_p = \int_S h_p ds$$

Zależą one również od wyboru "punktu zerowego" O na linii środkowej profilu. Współrzędne wycinkowe ω_p /jako funkcje s / zależą od trzech parametrów

$$\omega_p = \omega_p / s, x_p, y_p, 0/$$

$S_{\omega p}$ nazywa się wycinkowym momentem statycznym, zaś $I_{x\omega p}$ oraz $I_{y\omega p}$ wycinkowym momentem dewiacyjnym względem osi y lub x odpowiednio.

Do rozwiązania problemu wykorzystuje się sześć równań równowagi /1.27/ i /1.28/ oraz /1.34/, /1.35/ i /1.37/. Przez podstawienie wartości Q_x i Q_y z równań /1.28a,b/ do równań /1.27a,b/ otrzymuje się układ czterech równań różniczkowych liniowo niezależnych.

$$N' = -p_z$$

$$M''_x = -m'_x - p_x$$

$$M''_y = -m'_y - p_y$$

/1.39a-d/

$$T'_{\omega p} + T'_s = -m_p$$

Po podstawieniu wyrażeń /1.34c/, /1.35/ i /1.37/ otrzymuje się ostatecznie

$$EFw''''_0 =$$

$$ES_{\omega p} \varphi''' = -p_z$$

$$EI_{xx} \xi''''_p$$

$$+ EI_{x\omega p} \varphi'''' = p_x + m'_x$$

$$EI_{yy} \eta''''_p + EI_{y\omega p} \varphi'''' = p_y + m'_y$$

/1.39a-d/

$$ES_{\omega p} w''''_0 + EI_{x\omega p} \xi''''_p + EI_{y\omega p} \eta''''_p + EI_{\omega\omega p} \varphi'''' = GK \varphi' =$$

$$= m_p + m'_{\omega p}$$

gdzie wprowadzono nowe oznaczenie na ostatni składnik po prawej stronie /1.34c/

$$m_{\omega p} = \int_{s_k}^{s_L} \bar{p}_z \omega_p ds$$

/1.40/

W przypadku gdy oś y jest osią symetrii przekroju, wzory /1.34/ i /1.37/ na niektóre siły wewnętrzne oraz równania równowagi /1.39/ upraszczają się. Dobierając punkt początkowy na osi symetrii otrzymuje się

$$S_{\omega p} = 0 \quad \text{oraz} \quad I_{y\omega p} = 0$$

Przyjmując dodatkowo, że brak jest ciągłych obciążeń wzdłużnych /tzn. $\bar{p}_z = 0$ / otrzymuje się

$$Q_x = -E(I_{xx} \xi_p''' + I_{x\omega p} \varphi''')$$

$$Q_y = -EI_{yy} \eta_p'''$$

/1.41a-c/

$$T_{\omega p} = -E(I_{\omega\omega p} \varphi''' + I_{x\omega p} \xi_p''')$$

$$N_z = EFw_0'$$

$$M_x = -E(I_{xx} \xi_p'' + I_{x\omega p} \varphi'')$$

/1.41d-f/

$$M_y = -EI_{yy} \eta_p''$$

zaś równania różniczkowe równowagi upraszczają się do postaci

$$EFw_0'' = 0$$

$$EI_{xx} \xi_p'' + EI_{x\omega p} \varphi'' = P_x$$

/1.42a-d/

$$EI_y \eta_p'' = P_y$$

$$EI_{x\omega p} \xi_p'' + EI_{\omega\omega p} \varphi'' - GK\varphi' = m_p$$

Jedynie równania 1.42b i 1.42d są sprzężone. Identyczne równania można otrzymać również bez zakładania, że osie x, y są głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju.

Zależności /1.34, 1.37, 1.39/ znacznie się upraszczają i przyjmują postać znaną z teorii belek, gdy

$$S_{\omega p} = 0$$

$$I_{x\omega p} = 0$$

/1.43a-c/

$$I_{y\omega p} = 0$$

Wartości całek oznaczonych /1.43b,c/ zależą od położenia punktu P , wartość całki /1.43a/ zależy od położenia punktu O . Dobierając odpowiednio położenie

tych punktów można spełnić zależności /1.43/. Zagadnienie praktycznego określenia środka ścinania D o współrzędnych x_D i y_D , dla którego spełnione są warunki /1.43b,c/, podobnie jak odpowiedniego wyboru punktu zerowego O , będzie omówione dalej. Współrzędne wycinkowe względem środka ścinania D będą dalej oznaczane przez ω /bez indeksu P /. Współrzędne wycinkowe ω , które spełniają równanie /1.43a/, będą oznaczone przez Ω i nazywane unormowanymi współrzędnymi wycinkowymi.

Gdy spełnione są warunki /1.43/, zależności /1.37/ przekształcają się do postaci

$$N_z = EFw'_0$$

$$M_x = -EI_{xx}\xi''$$

/1.44a-c/

$$M_y = -EI_{yy}\eta''$$

przy czym ξ i η oznaczają przemieszczenia środka ścinania w kierunku osi x i y . Podstawiając w'_0 , ξ'' , η'' , określone z zależności /1.44/, do wzoru /1.30/ na naprężenia σ otrzymuje się

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_{xx}}x + \frac{M_y}{I_{yy}}y - \varphi''\Omega \quad /1.45/$$

Z wyjątkiem ostatniego składnika, wzór ten zgadza się z formułą na naprężenia normalne pręta zginanego i rozciąganego /lub ściskanego/. Człon $(-\varphi''\Omega)$ przedstawia wpływ deplanacji na naprężenia normalne i jest charakterystyczny dla tzw. skręcania skrzepowanego. Rozkład naprężeń $\varphi''\Omega$ jest samozrównoważony w przekroju. Przemieszczenia punktów przekroju poprzecznego /1.13/ w kierunku osi pręta otrzymuje się jako sumę przemieszczenia równoległego całego przekroju, obrotów wokół osi x i y oraz, na koniec, deplanacji /spaczenia/ przekroju, której rozkład określony jest przez wykres Ω .

Praca naprężeń normalnych na przemieszczeniu przygotowanym $w_0=1$ jest równa sile podłużnej

$$N \cdot 1 = \int_F \sigma \cdot 1 dF$$

W podobny sposób można otrzymać momenty zginające M_y lub M_x dla $\xi' = -1$ względnie $\eta' = -1$.

Na podstawie analogii można również obliczyć pracę siły wewnętrznej na przemieszczeniu przygotowanym $\varphi' = -1$.

$$M_{\Omega} = \int_F \sigma \Omega dF \quad /1.46/$$

Wielkość M_{Ω} nazywa się bimomentem. Gdy podstawić do wyrażenia /1.46/ wzór na naprężenia σ /1.30/, otrzymuje się /uwzględniając warunki /1.43/:

$$M_{\Omega} = -EI_{\Omega\Omega} \varphi'' \quad /1.47/$$

gdzie

$$I_{\Omega\Omega} = \int_F \Omega^2 dF \quad /1.48/$$

Wielkość $I_{\Omega\Omega}$ nazywana jest wycinkowym momentem bezwładności. Przez podstawienie φ'' z wyrażenia /1.47/ do wzoru na naprężenia σ /1.45/ otrzymuje się

$$\sigma = \frac{N}{F} + \frac{M_x}{I_{xx}} x + \frac{M_y}{I_{yy}} y + \frac{M_{\Omega}}{I_{\Omega\Omega}} \Omega \quad /1.49/$$

Wielkości N, M_x, M_y można określić z warunków równowagi sił zewnętrznych i wewnętrznych, niezależnie od odkształceń, gdy znane są siły zewnętrzne i reakcje podpór. Zupełnie inaczej jest w przypadku bimomentu M_{Ω} , który może być określony tylko przez kąt skręcenia /ściślej, jego drugą pochodną/.

Dla unormowania współrzędnych wycinkowych Ω /spełniających warunki /1.43/ również pozostałe siły wewnętrzne sprowadzają się do prostszej postaci

$$\begin{aligned} Q_x &= -EI_{xx} \xi'' + m_x \\ Q_y &= -EI_{yy} \eta'' + m_y \\ T_{\Omega} &= -EI_{\Omega\Omega} \varphi'' + m_{\Omega} \end{aligned} \quad /1.50a-c/$$

Przez podstawienie wzorów /1.44/, /1.50/, /1.35/ do równań równowagi /1.39/ otrzymuje się cztery niezależne równania różniczkowe

$$\begin{aligned} EFw_0'' &= -P_z \\ EI_{xx} \xi^{IV} &= P_x + m_x' \\ EI_{yy} \eta^{IV} &= P_y + m_y' \\ EI_{\Omega\Omega} \varphi^{IV} - GK\varphi'' &= m_D + m_{\Omega}' \end{aligned} \quad /1.51a-d/$$

Naprężenia składowe σ , τ_w i τ_s są przy skręcaniu określone przez siły wewnętrzne M_Ω , T_Ω i T_s , które otrzymuje się z rozwiązania równania różniczkowego skręcania /1.51d/. Uwzględniając, że w przypadku skręcania $N = M_x = M_y = 0$, otrzymuje się na podstawie wyrażenia /1.49/

$$\sigma = \frac{M_\Omega}{I_{\Omega\Omega}} \Omega \quad /1.52/$$

Naprężenia styczne otrzymuje się z wyrażenia /1.33/ po uwzględnieniu /1.50/ i /1.44a/ oraz przyjmując, że $N = Q_x = Q_y = 0$

$$\tau_w = - \int \bar{p}_z ds - \frac{\tilde{S}_\Omega T_\Omega}{I_{\Omega\Omega} t} \quad /1.53/$$

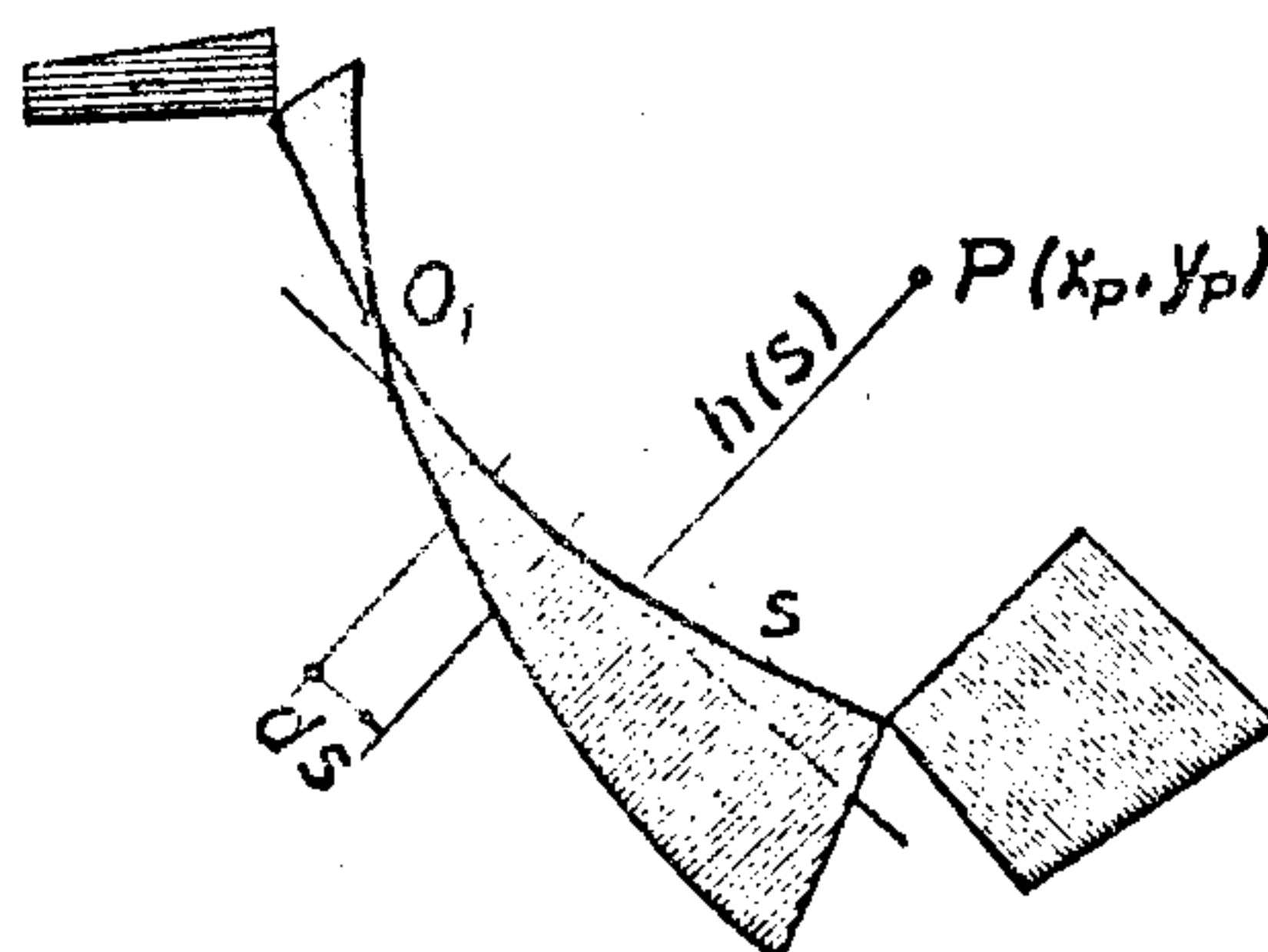
przy czym obciążenie $\bar{p}_z$ przyjęto takie, że p_z , m_x i m_y są równe zeru. Dla $\bar{p}_z = 0$ otrzymuje się

$$\tau_w = - \frac{\tilde{S}_\Omega T_\Omega}{I_{\Omega\Omega} t} \quad /1.54/$$

Naprężenia styczne od czystego skręcania τ_s oblicza się w oparciu o wzory /1.31/, /1.35/ i /1.36/

$$\tau_s = \frac{2T_s}{\frac{7}{3} \sum b_i t_i^3} e \quad /1.55/$$

Analizuje się przekrój poprzeczny pręta, w którym wybiera się dowolny punkt $P(x_p, y_p)$, od którego określa się odległość h od stycznej do linii środkowej profilu /rys. 1.11/. Wybiera się również dowolny punkt zerowy O_1 na linii środkowej profilu.



Rys. 1.11

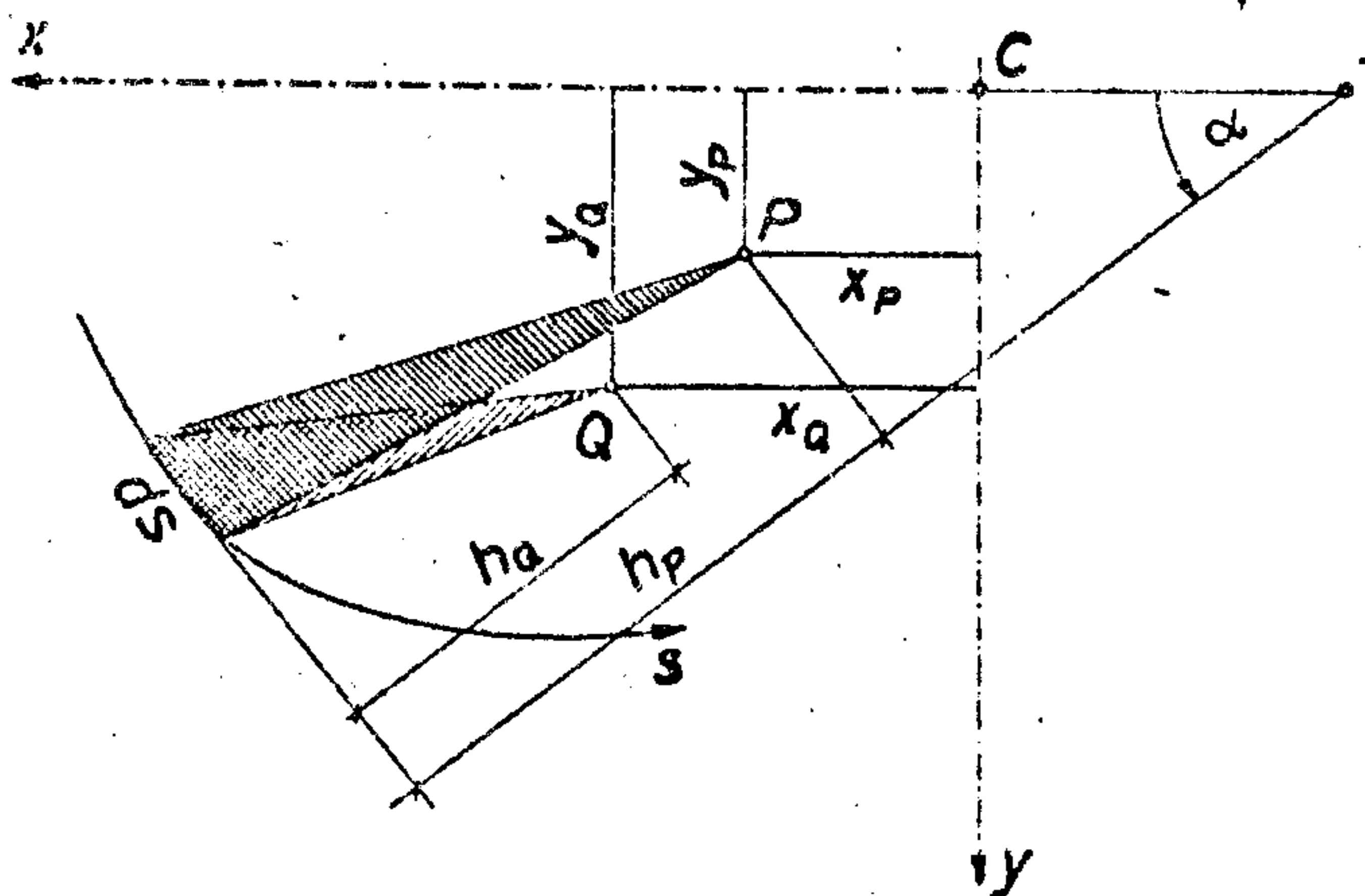
Dla numerycznego określenia współrzędnej wycinkowej $\omega_p(0, s)$ wybiera się następującą regułę znaków: współrzędna s odmierzana jest w obu kierunkach od punktu O_1 , podobnie jak bieg strumienia, który wypływa ze swojego źródła w obu kierunkach. Przyrost $hds=d\omega$ interpretuje się jako dodatni, gdy element ds skierowany jest przeciwnie do kierunku ruchu wskazówek zegara przy obrocie wokół bieguna P , dla obserwatora patrzącego w kierunku ujemnym osi z .

Należy określić związek między współrzędnymi wycinkowymi ω_p względem bieguna P i współrzędnymi $\omega_q(0, s)$, które oblicza się względem dowolnie wybranego bieguna Q o współrzędnych x_q i y_q . Punkt zerowy O_1 o współrzędnych x_0 i y_0 jest jednak ten sam dla ω_p i dla ω_q . Przyrost współrzędnej wycinkowej $d\omega_p$ wynosi

$$d\omega_p = h_p ds \quad /1.56/$$

podobnie dla ω_q

$$d\omega_q = h_q ds \quad /1.57/$$



Rys. 1.12

Biorąc pod uwagę rys. 1.4 można wyrazić odległości h_p i h_q przez współrzędne kartezjańskie odpowiednich punktów

$$h_p = (x - x_p) \cos \alpha + (y - y_p) \sin \alpha$$

$$h_q = (x - x_q) \cos \alpha + (y - y_q) \sin \alpha$$

gdzie α jest kątem, jaki tworzy normalna do linii środkowej profilu w punkcie o współrzędnych x, y z dodatnim kierunkiem osi x . Ponieważ

$$-\frac{dx}{ds} = \sin \alpha \quad \text{oraz} \quad \frac{dy}{ds} = \cos \alpha$$

przez podstawienie zależności na h_p i h_q do /1.56/ te ostatnie można przekształcić do postaci:

$$d\omega_p = (x - x_p) dy - (y - y_p) dx \quad /1.56/$$

$$d\omega_q = (x - x_p) dy - (y - y_p) dx \quad /1.57/$$

Odejmując stronami równanie /1.57/ od równania /1.56/, otrzymuje się

$$d(\omega_p - \omega_q) = (y_p - y_q) dx - (x_p - x_q) dy$$

lub po wykonaniu całkowania

$$\omega_p = \omega_q + (y_p - y_q)x - (x_p - x_q)y + C \quad /1.58/$$

gdzie C jest stałą całkowania, którą określa się z warunku, że w punkcie zerowym O_1 /wspólnym dla ω_p i ω_q / spełniony jest warunek

$$\omega_p(O_1) = \omega_q(O_1) = 0$$

wtedy

$$(y_p - y_q)x_0 - (x_p - x_q)y_0 + C = 0$$

lub

$$C = -(y_p - y_q)x_0 + (x_p - x_q)y_0 \quad /1.59/$$

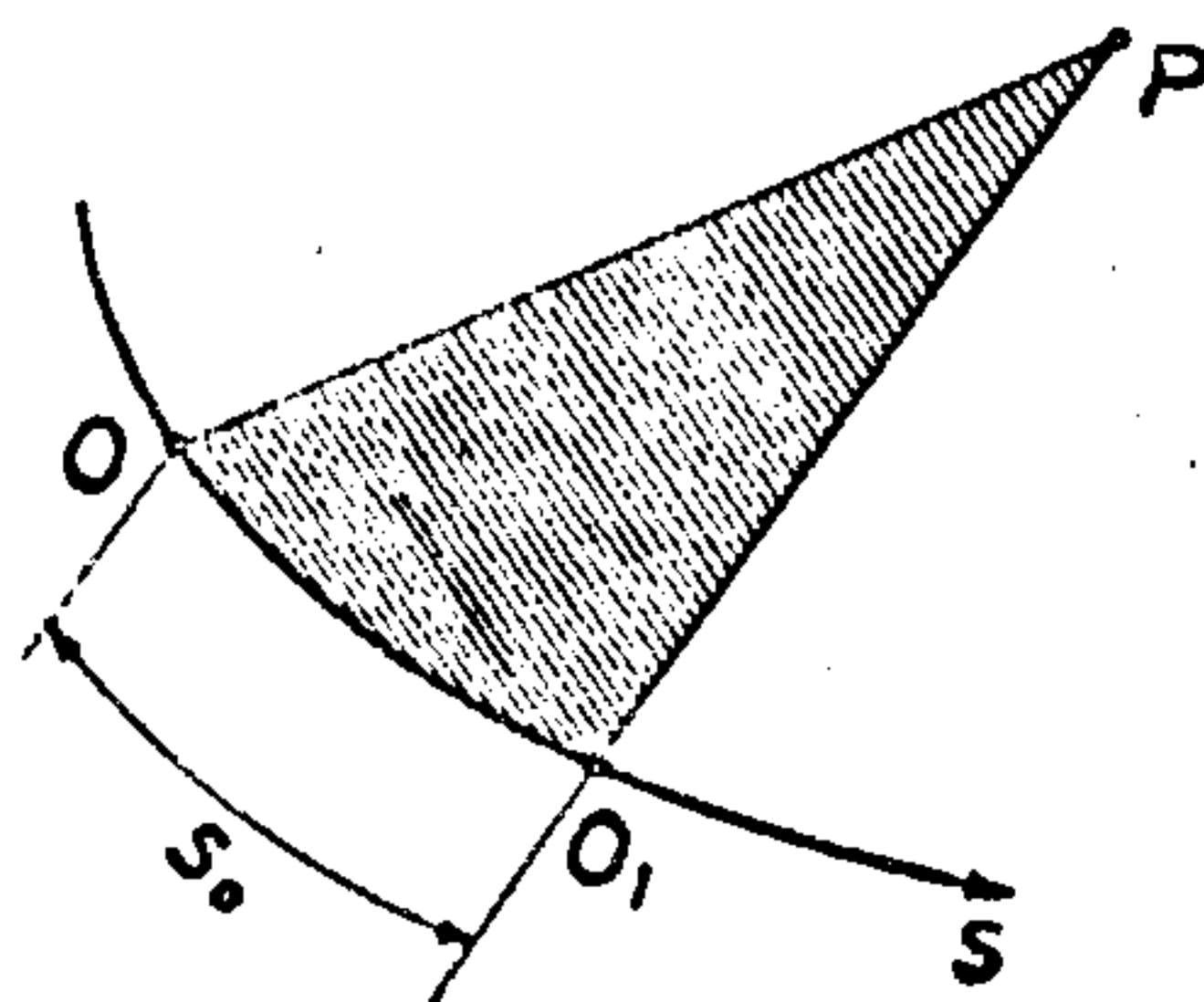
Z podstawienia wyrażenia /1.59/ do /1.58/ wynika bezpośredni związek między ω_p i ω_q

$$\omega_p = \omega_q + (y_p - y_q)(x - x_0) - (x_p - x_q)(y - y_0) \quad /1.60/$$

Dla dalszych rozważań istotne jest ustalenie związku między współrzędnymi wycinkowymi $\omega_p(0, s)$ względem punktu O oraz współrzędnymi wycinkowymi $\omega_p(O_1, s)$ względem punktu O_1 /rys. 1.13/. Zgodnie z definicją współrzędnych wycinkowych wielkości te oblicza się według wzorów

$$\omega_p(O_1, s) = \int_{O_1}^s h ds$$

$$\omega_p(O, s) = \int_0^s h ds$$



Rys. 1.13

Po odjęciu stronami

$$\omega_p(O, s) = \omega_p(O_1, s) + \int_0^{O_1} h ds$$

lub

$$\omega_p(O, s) = \omega_p(O_1, s) + \omega_{op}$$

/1.61/

gdzie

$$\omega_{op} = \int_0^{O_1} h ds$$

Stała ω_{op} jest podwójnym polem powierzchni /zakreskowanym ukośnie na rys.

1.13/. Odcinek s_0 , który należy do tej powierzchni, jest długością linii środkowej profilu mierzoną od punktu O do O_1 .

Środek ścinania D był zdefiniowany jako punkt, dla którego spełnione są warunki

$$I_{x\omega} = \int_F \omega_D x dF = 0$$

/1.62a,b/

oraz

$$I_{y\omega} = \int_F \omega_D y dF = 0$$

Niech $\omega_D(O_1, s)$ będzie współrzędną wycinkową względem środka ścinania, zaś $\omega_Q(O_1, s)$ współrzędną wycinkową względem dowolnie wybranego bieguna Q . Wówczas

$$\omega_D(O_1, s) = \omega_Q(O_1, s) + (y_D - y_Q)x - (x_D - x_Q)y + C$$

zaś po podstawieniu do równań /1.62a,b/ otrzymuje się

$$\int_F \omega_Q(O_1, s) x dF + (y_D - y_Q) \int_F x^2 dF - (x_D - x_Q) \int_F xy dF + C \int_F x dF = 0$$

/1.63a/

$$\int_F \omega_Q(O_1, s) y dF + (y_D - y_Q) \int_F xy dF - (x_D - x_Q) \int_F y^2 dF + C \int_F y dF = 0$$

/1.63b/

Ponieważ założono na wstępie, że osie x i y są głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju, moment dewiacyjny i momenty statyczne względem tych osi są równe zeru, tj.

$$\int_F xy dF = 0 \quad \int_F y dF = 0 \quad \int_F x dF = 0$$

$$I_{x\omega Q} + (y_D - y_Q) I_{xx} = 0$$

$$I_{y\omega Q} - (x_D - x_Q) I_{yy} = 0$$

tzn.

$$y_D - y_Q = - \frac{I_{y\omega Q}}{I_{xx}}$$

/1.64a,b/

$$x_D - x_Q = \frac{I_{x\omega Q}}{I_{yy}}$$

gdzie

$$I_{x\omega Q} = \int_F x \omega_Q (O_1, s) dF$$

$$I_{y\omega Q} = \int_F y \omega_Q (O_1, s) dF$$

/1.65a,b/

Poszukiwane współrzędne środka ścinania określone są więc przez zależności:

$$y_D = - \frac{I_{x\omega Q}}{I_{xx}} + y_Q$$

$$x_D = \frac{I_{y\omega Q}}{I_{yy}} + x_Q$$

/1.66a,b/

Nowy punkt zerowy na linii środkowej profilu dobiera się tak, by był spełniony warunek /1.43a/. Przez zależność /1.61/ określony jest związek między współrzędnymi wycinkowymi względem różnych punktów początkowych O i O_1 na linii środkowej profilu, dla tego samego bieguna P . Wprowadzając oznaczenia

$$\omega_P (O, s) = \omega_D (O, s) = \Omega$$

$$\omega_P (O, s) = \omega_D (O_1, s) = \omega (O_1, s)$$

warunek /1.43a/ przyjmuje postać /po uwzględnieniu 1.61/

$$S_\Omega = \int_F \Omega dF = \int_F \omega (O_1, s) dF + \omega_0 \int dF = 0$$

skąd otrzymuje się

$$\omega_0 = - \frac{1}{F} \int_F \omega(0_1, s) dF = - \frac{S_{\omega}(0_1)}{F} \quad /1.66/$$

Unormowane współrzędne wycinkowe $\Omega = \omega(0_1, s)$ można określić wzorem

$$\Omega = \omega(0_1, s) + \omega_0$$

Charakterystyki wycinkowe przekroju dla unormowanych współrzędnych wycinkowych oznaczane są indeksem Ω

2. TEORIA CIENKOŚCIENNYCH PRĘTÓW O PRZĘKROJU ZAMKNIĘTYM

Teoria cienkościennych prętów o przekroju otwartym opiera się na założeniu o nieodkształcalności konturu przekroju poprzecznego oraz na założeniu o braku odkształceń postaciowych powierzchni środkowej. Dla przekrojów zamkniętych nie można przyjąć drugiego założenia. W przypadku czystego /nieskrępowanego/ skręcania przekrojów zamkniętych naprężenia τ_s są rozłożone równomiernie na grubości ścianki i działają równoległe do linii środkowej przekroju. Naprężeniom tym odpowiadają odkształcenia postaciowe γ_s , które mają w płaszczyźnie środkowej przekroju wartości różne od zera. Pominięcie tych odkształceń oznaczałoby, że /w przypadku czystego skręcania/ w ogóle nie występują żadne odkształcenia.

Naprężenia wtórne τ_w , wywołane skrępowaniem deplanacji, są dla przekrojów zamkniętych wielkościami tego samego rzędu, co naprężenia τ_s . Ta okoliczność, jak również identyczny /równomierny/ rozkład na grubości ścianki, jest przyczyną, że wpływ naprężeń τ_w i τ_s na odkształcenie pręta jest podobny. Odkształcenia postaciowe γ_w , wywołane przez τ_w , nie są wielkościami małymi drugiego rzędu i ich pominięcie prowadzi do niedokładności, które nie mogą być tolerowane. Wynika stąd, że dla prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym nie jest możliwe zbudowanie teorii, która byłaby tak prosta i dokładna jak teoria dla przekrojów otwartych.

W teorii prętów cienkościennych o przekroju zamkniętym prócz założenia a/ o nieodkształcalności konturu przekroju poprzecznego, przyjmuje się założenie b/, tzn. "pomija się odkształcenia powierzchni środkowej pręta, wywołane naprężeniami stycznymi τ_w " /zamiast założenia b/ przyjmowanego w przypadku prętów o przekroju otwartym/.

Stan naprężeń może być interpretowany jako suma dwóch stanów. Stan pierwotny, określony jest przez naprężenia styczne τ_s , przy czym naprężenia normalne $\sigma_z = \sigma$ są równe zeru. Naprężenia τ_s są rozłożone równomiernie na grubości ścianki i równoległe do linii środkowej profilu. Odkształcenia postaciowe γ są związane z naprężeniami stycznymi τ_s według wzoru

$$\gamma = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{\tau_s}{G} \quad /2.1/$$

Stan wtórny, jest zadany przez naprężenia normalne $\sigma_z = \sigma$ i przez naprężenia styczne τ_w . Zgodnie z założeniem b/ pomija się odkształcenia postaciowe wywołane naprężeniami τ_w . Naprężenia τ_w mają ten sam kierunek i rozkład na grubości ścianki, co naprężenia τ_s . Całkowite naprężenia styczne są równe sumie

$$\tau = \tau_s + \tau_w$$

Po przyjęciu takich założeń, dalszy opis odkształceń można przeprowadzić w podobny sposób, jak w przypadku przekrojów otwartych. Na podstawie wzoru /2.1/ otrzymuje się

$$w(s, z) = - \int_0^s \frac{\partial v}{\partial z} ds + w_0(z) + \frac{1}{G} \int \tau_s ds \quad /2.2/$$

Po uwzględnieniu zależności /1.4/, /1.7/ i /1.11/ z poprzedniego rozdziału, można formułę /2.2/ przekształcić do postaci

$$w(s, z) = - \int_0^s (\eta_p' \cos \alpha - \xi_p' \sin \alpha + \varphi' h) ds + w_0(z) + \varphi' \int_0^s \tilde{\tau} ds \quad /2.3/$$

gdzie $\tilde{\tau} = \tilde{\tau}(s)$ jest naprężeniem stycznym przy czystym skręceniu pręta dla $G \varphi' = 1$

$\tilde{\tau}$ można określić jako funkcję rozkładu naprężeń stycznych w przekroju dla przypadku czystego skręcania. Rzeczywiste wartości naprężeń stycznych τ_s oblicza się według wzoru

$$\tau_s = G \varphi' \tilde{\tau} \quad /2.4/$$

Dla przekrojów wielokomórkowych $\tilde{\tau}$ jest wyrażone w postaci

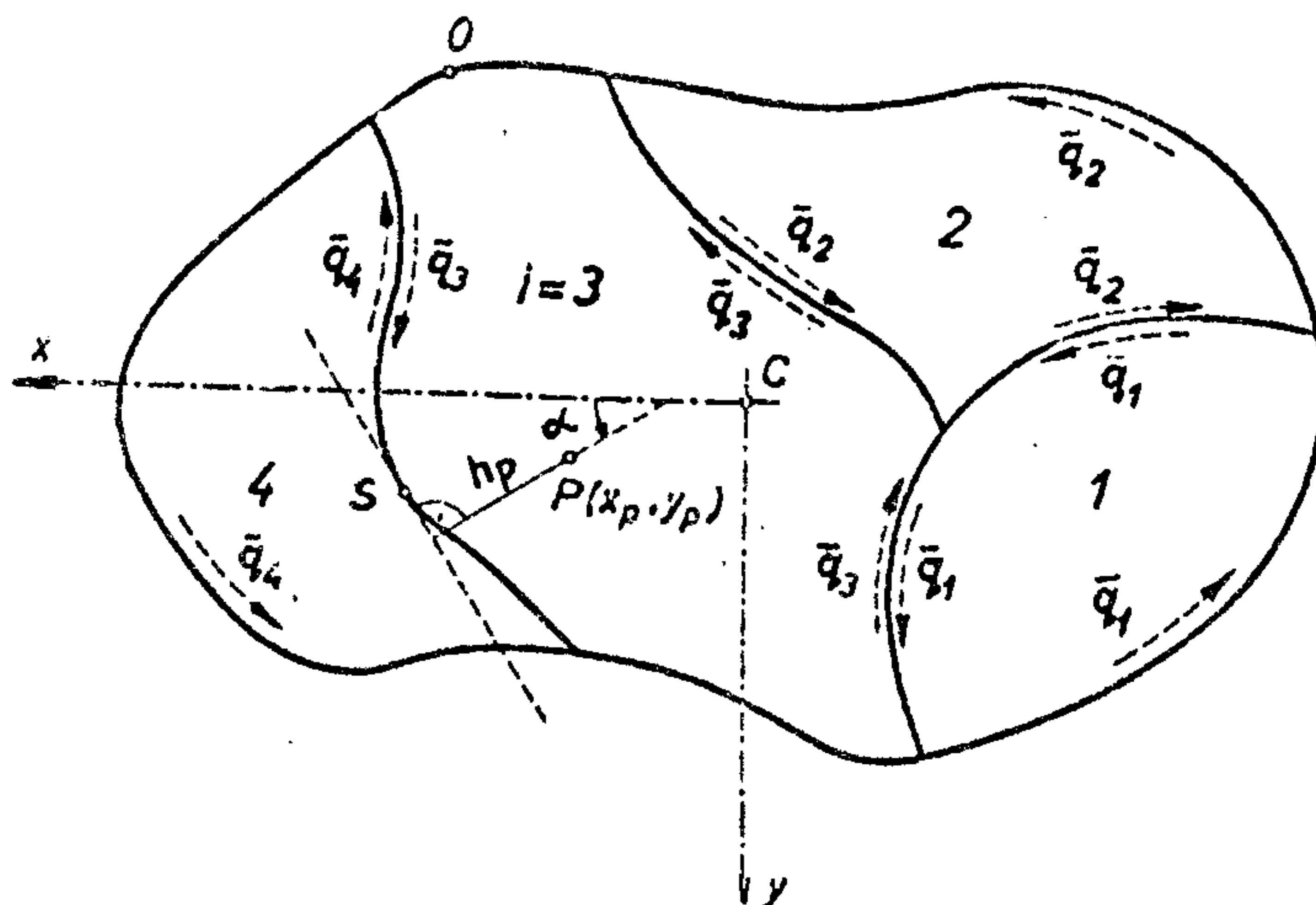
$$\tilde{\tau}_s = \frac{\tilde{q}_i - \tilde{q}_k}{t(s)} \quad /2.5/$$

Indeksy i oraz k dotyczą tych komórek, które rozdzielone są przez wspólną ściankę, w której poszukiwane są naprężenia.

Strumienie

$$\tilde{q}_i = \frac{1}{G \varphi'} q_i$$

są stałe w obrębie komórki i mają zwrot dodatni przeciwny do ruchu wskazówek zegara /rys. 2.1/.



Rys. 2.1

Strumienie styczne $\tilde{q}_i$ oblicza się z rozwiązania układu równań liniowych

$$\tilde{q}_i \eta_{ii} - \sum_{k=1}^m \tilde{q}_k \eta_{ik} = 2A_i \quad /2.6/$$

$i = 1, 2, \dots, n$

gdzie n jest całkowitą liczbą komórek, zaś m - liczbą komórek sąsiednich komórki i . s_i jest długością linii środkowej wszystkich ścianek ograniczających komórkę i , zaś A_i - polem powierzchni ograniczonej konturem komórki i . Współczynniki układu /2.6/ są określone przez zależności

$$\eta_{ii} = \oint_{s_i} \frac{ds}{t}; \quad \eta_{ik} = \int_{s_{ik}} \frac{ds}{t} \quad /2.7/$$

Granice całkowania obejmują długość s_i całkowitego, zamkniętego obwodu komórki i , bądź długości s_{ik} wspólnej ścianki sąsiednich komórek o numerach i oraz k .

W przypadku przekroju jednokomórkowego można $\tilde{\tau}$ obliczyć według wzoru

$$\tilde{\tau} = \frac{\tilde{q}}{t} = \frac{2A}{t \oint \frac{ds}{t}}$$

lub uwzględniając, że

$$\oint \frac{ds}{t} = \frac{4A^2}{K} \quad /2.8/$$

otrzymuje się ostatecznie

$$\tilde{\tau} = \frac{K}{2At}$$

gdzie K jest stałą skręcania dla cienkościennych przekrojów zamkniętych.

Formułę /2.3/ na przemieszczenia wzdłużne w można przekształcić do postaci analogicznej jak w przypadku przekrojów otwartych

$$w(s, z) = w_0 - \eta'_p y + \xi'_p x - \varphi'_p \omega_p \quad /2.10/$$

przy czym

$$\omega_p = \int_0^s (h_p - \tilde{\tau}) ds = \int_0^s h_p ds - \int_0^s \tilde{\tau} ds \quad /2.11/$$

Funkcję ω_p , określającą deplanację przekroju, nazywa się jednostkową deplanacją, podobnie jak to było w przypadku przekrojów otwartych. Używa się również nazwy "wycinkowe współrzędne", chociaż nie jest to ścisłe ze względu na drugi składnik w wyrażeniu /2.11/ /w rzeczywistości bowiem tylko pierwszy składnik jest podwójnym polem wycinka/. Podobnie jak w przypadku przekrojów otwartych, punkt odniesienia P , względem którego obliczone są współrzędne wycinkowe ω_p , jest dowolnym punktem leżącym w płaszczyźnie przekroju /rys. 2.1/. Również punkt początkowy O , od którego rozpoczyna się całkowanie, jest dowolnie wybranym punktem. Osie x, y są głównymi centralnymi osiami bezwładności przekroju.

Jedyną różnicą między omawianą teorią dla przekrojów zamkniętych a teorią dla przekrojów otwartych, jest różny rozkład naprężeń tnących dla obu typów przekrojów.

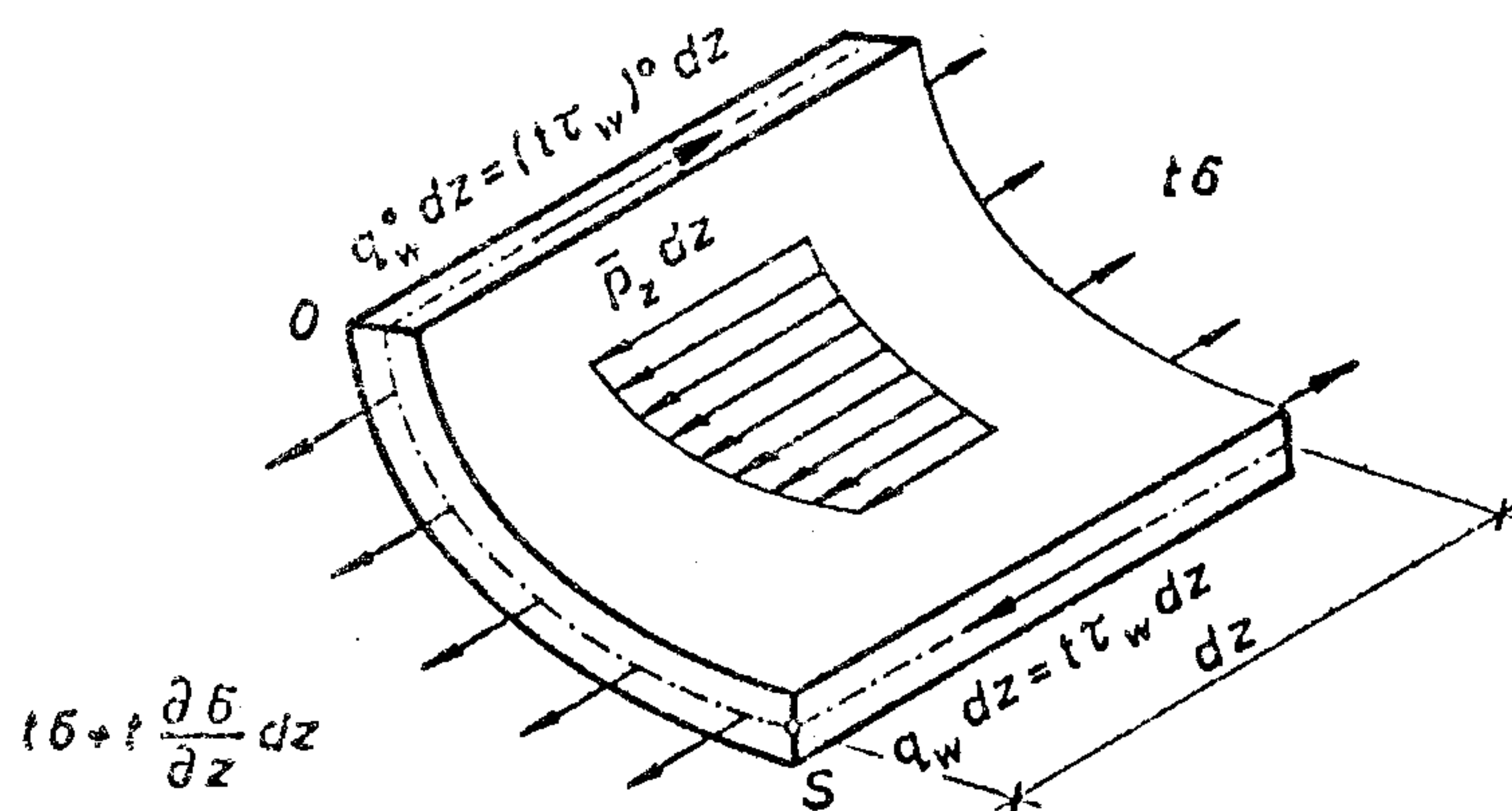
Naprężenia styczne τ_s są równomiernie rozłożone na grubości ścianki, w przeciwieństwie do antysymetrycznego rozkładu w przypadku przekrojów otwartych. Rozkład naprężeń τ_s dla przekrojów zamkniętych jest pokazany na rys. 1.6c, a nie 1.6b. Wynika stąd też, że naprężenia τ_s oblicza się wg wzoru /2.4/, a nie /1.31/. Również formuła na stałą skręcania dla przekrojów zamkniętych jest inna,

$$K = 2 \sum_{i=1}^n A_i q_i \quad /2.13/$$

a dla przekroju jednokomórkowego ma postać

$$K = \frac{4 A^2}{\oint \frac{ds}{t}} \quad /2.14/$$

Rozkład naprężeń stycznych τ_w w przekroju zamkniętym stanowi odrębne zagadnienie. W celu określenia τ_w rozważa się /inaczej niż to było w przypadku prętów o przekroju otwartym/ element wycięty dwiema płaszczyznami prostopadłymi do osi pręta, leżącymi w odległości dz , oraz dwiema płaszczyznami równoległymi do osi pręta, z których jedna przechodzi przez punkt O a druga przez punkt S , w którym oblicza się naprężenia τ_w /rys. 2.2/.



Rys. 2.2

Z warunku równowagi wszystkich sił działających na omawiany element w kierunku z otrzymuje się

$$q_w = t\tau_w = - \int_0^S t \frac{\partial \sigma}{\partial z} ds - \int_0^S \bar{p}_z ds + q_w^0 \quad /2.15/$$

Różnica pomiędzy powyższym wzorem, a odpowiednim wzorem dla przekrojów otwartych, polega na występowaniu w powyższym wzorze składnika q_w^0 , który nie może być określony na podstawie warunku równowagi. Przy konsekwentnie przestrzegającym założeniu o pomijaniu odkształceń postaciowych γ_w nie można określić rozkładu naprężeń τ_w w przekroju z powodu statycznej niewyznaczalności tych naprężeń. Odkształcenia postaciowe γ_w rozważa się dodatkowo w sposób analogiczny jak przy czystym skręcaniu. Zamiast warunku $\gamma_w = 0$ przyjmowanego przy czystym skręcaniu przyjmuje się warunek, że średnie odkształcenie postaciowe wzdłuż każdego zamkniętego obwodu linii środkowej przekroju jest równe zero, tj.

$$\frac{1}{s_i} \oint \gamma_w ds = 0 \quad /2.16/$$

lub

$$\oint_{s_i} \tau_w ds = 0 \quad /2.17/$$

W przypadku przekroju jednokomórkowego otrzymuje się z równania /2.15/, po uwzględnieniu /2.17/

$$\oint \tau_w ds = \oint \frac{q_w}{t} ds = \oint \frac{q'_w}{t} ds + q_w^0 \oint \frac{ds}{t} = 0 \quad /2.18/$$

gdzie

$$q'_w = - \int_0^S t \frac{\partial \sigma}{\partial z} ds - \int_0^S \bar{p}_z ds \quad /2.19/$$

Należy zauważyć, że powyższy wzór na q'_w ma identyczną postać ze wzorem /1.32/ na strumień styczny w przekroju otwartym, utworzonym z przekroju zamkniętego

przez rozcięcie linii środkowej profilu w punkcie początkowym 0. Wzory /1.32/, /1.33/, /1.53/, /1.54/ obowiązują również dla q'_w , względnie $\tau'_w = \frac{q'_w}{t}$. Należy jednak pamiętać, że charakterystyki geometryczne są w rozpatrywanym przypadku określone dla współrzędnych wycinkowych, obliczonych zgodnie z wzorem /2.11/.

Z równania /2.18/ wynika

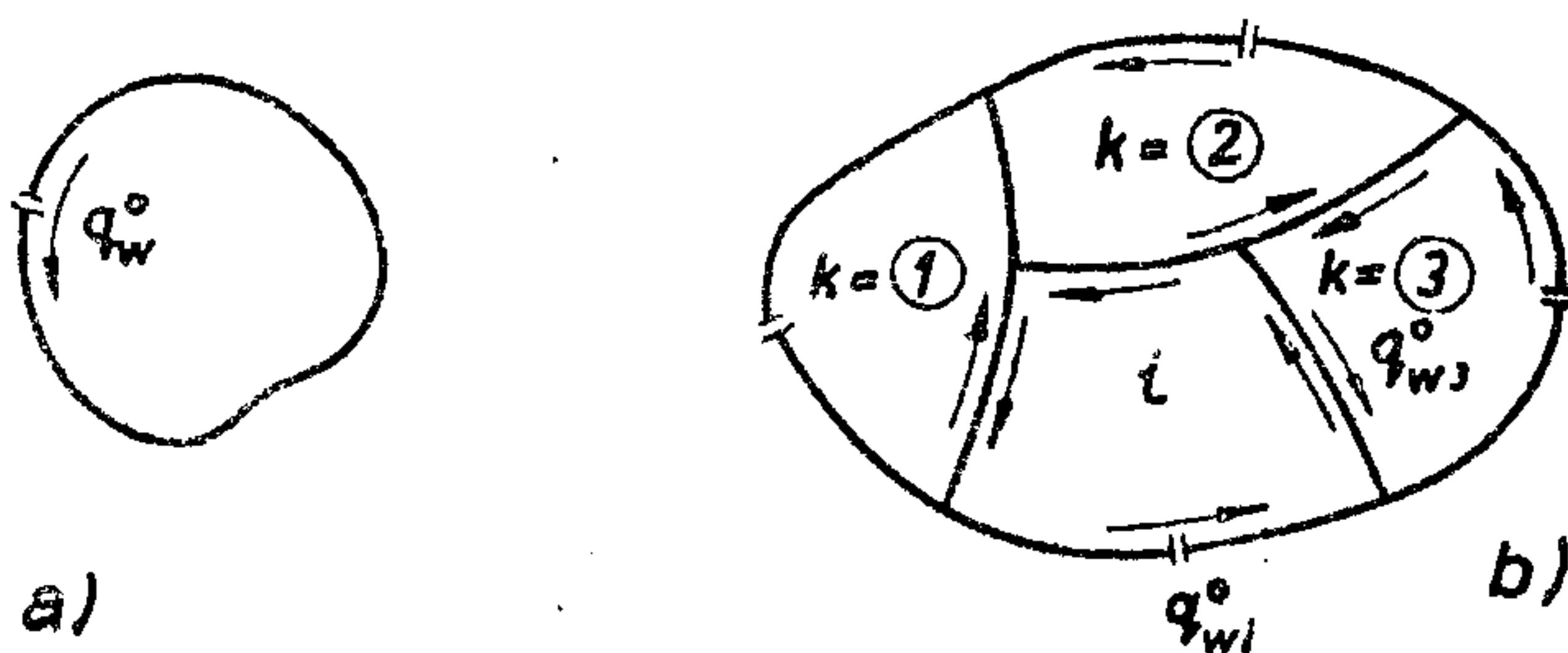
$$q_w^o = - \frac{\oint \frac{q'_w}{t} ds}{\oint \frac{ds}{t}} \quad /2.20/$$

Całkowity strumień naprężeń stycznych można przedstawić w postaci

$$q_w^o = q'_w + q_w^o \quad /2.21/$$

q'_w oznacza strumień "odpowiadającego" lub "przyporządkowanego" przekroju otwartego /rys. 2.3a/, a

q_w^o stały składnik określony z warunku /2.17/.



Rys. 2.3

W celu określenia strumienia stycznego q_w w przekroju wielokomórkowym, rozpatruje się przekrój otwarty, który powstał przez rozcięcie wszystkich komórek przekroju zamkniętego /rys. 2.3b/. Dla przekroju utworzonego w ten sposób oblicza się strumień q_w według formuły /1.32/, tj. w identyczny sposób, jak dla przekroju otwartego. Należy przy tym pamiętać, że charakterystyki $\tilde{S}_\Omega$ i $I_{\Omega\Omega}$ muszą być obliczone na podstawie współrzędnych wycinkowych ω_p określonych dla przekroju zamkniętego zgodnie z wzorem /2.11/.

Niewiadome strumienie styczne q_{wi}^o ($i=1,2,\dots,n$) oblicza się przez zastosowanie warunku /2.17/ dla każdej komórki przekroju osobno. W ten sposób otrzymuje się następujący układ równań liniowych /uwzględniając dodatnie znaki strumieni stycznych zgodnie z rys. 2.3b/.

$$q_{wi}^o \eta_{ii} - \sum_{k=1}^m q_{wk}^o \eta_{ik} + \oint_{s_i} \frac{q'_w}{t} ds = 0 \quad (i=1,2,\dots,n) \quad /2.22/$$

gdzie n jest całkowitą liczbą komórek w przekroju, zaś m - liczbą komórek sąsiednich komórki i . Współczynniki η_{ii} oraz η_{ik} oblicza się według wzoru /2.7/. Warto zauważyć, że współczynniki przy niewiadomych w układach /2.6/ i /2.22/ są takie same, jakie można by otrzymać przy wyprowadzeniu obu układów z warunku okresowości funkcji $w(s)$ przy całkowaniu, wzdłuż zamkniętego obwodu linii środkowej przekroju.

Dla dowolnego punktu linii środkowej przekroju wielokomórkowego wzór na całkowity strumień naprężeń stycznych q_w ma postać

$$q_w = q'_w + q_{wi}^o - q_{wk}^o \quad /2.23/$$

przy czym przyjęto, że dodatni zwrot jest przeciwny do ruchu wskazówek zegara /rys. 2.3b/. Indeksy i oraz k są numerami komórek leżących po obu stronach rozpatrywanego elementu przekroju.

Po pominięciu obciążeń powierzchniowych $\bar{p}_z$ /działających w kierunku osi z / z wzoru /1.54/ wynika, że

$$q'_w = - \frac{\tilde{S}_\Omega T_\Omega}{T_{\Omega\Omega}} \quad /2.24/$$

Dodatkowy składnik q_{wi}^o oblicza się z rozwiązania układu równań /2.22/. Po podstawieniu wyrażenia /2.24/ równania te przekształcają się do postaci

$$q_{wi}^o \eta_{ii} - \sum_{k=1}^m q_{wk}^o \eta_{ik} = \frac{T_\Omega}{T_{\Omega\Omega}} \oint \frac{\tilde{S}_\Omega}{t} ds \quad /2.25/$$

($i = 1, 2, \dots, n$)

Niewiadome strumienie można przedstawić w postaci

$$q_{wi}^o = \frac{S_{\Omega i}^o}{I_{\Omega\Omega}} T_\Omega \quad /2.26/$$

tzn. $S_{\Omega i}^o$ jest wartością niewiadomej q_{wi}^o dla $\frac{T_\Omega}{I_{\Omega\Omega}} = 1$

W przypadku przekroju jednokomórkowego otrzymuje się dla $S_{\Omega i}^o = S_\Omega^o$

$$S_\Omega^o = \frac{\oint \frac{\tilde{S}_\Omega}{t} ds}{\oint \frac{ds}{t}} \quad /2.27/$$

Ostatecznie otrzymuje się wzór na całkowity strumień q_w

$$q_w = q'_w + q_{wi}^o - q_{wk}^o = - \frac{\tilde{S}_\Omega (S_{\Omega i}^o - S_{\Omega k}^o)}{I_{\Omega\Omega}} T_\Omega \quad /2.28/$$

Wyrażenie

$$\tilde{S}_\Omega - (S_{\Omega i}^o - S_{\Omega k}^o)$$

ma czysto geometryczny charakter i określa rozkład strumienia naprężeń stycznych q_w w przekroju.

Przybliżone rozwiązanie problemu skręcania prętów o przekroju zamkniętym sprowadza się do rozwiązania równań różniczkowych identycznych, jak w przypadku prętów o przekroju otwartym.

3. TEORIA CIENKOŚCIENNYCH PRĘTÓW O PRZĘKROJU ZAMKNIĘTYM Z UWZGLĘDNIENIEM WPŁYWU DODATKOWYCH DEPLANACJI OD WTÓRNYCH NAPRĘŻEN STYCZNYCH

Oprócz założenia o nieodkształcalności przekroju poprzecznego w swojej płaszczyźnie przyjmuje się, że rozkład /ale nie wielkość/ deplanacji wzdłuż linii środkowej profilu jest przy skręcaniu skrępowanym taki sam, jak w przypadku czystego skręcania. Odnosnie dowolnego bieguna P obowiązują następujące formuły na składowe przemieszczenia punktu $S(x, y)$ przekroju

$$v = \eta_p \cos \alpha - \xi_p \sin \alpha + \varphi h_p \quad /3.1/$$

$$w = 1 \cdot w_0 - \eta_p' y - \xi_p' x - \nu \omega_p \quad /3.2/$$

Przyjęto taki sam układ współrzędnych, jak w poprzednim rozdziale /rys. 2.1/. Wzory /3.1/ i /1.11/ są identyczne, co jest konsekwencją przyjęcia założenia o nieodkształcalności przekroju w swojej płaszczyźnie. Natomiast wzór /3.2/, na przemieszczenia wzdłużne w , różni się od odpowiedniego wzoru /1.13/ dla przekrojów otwartych.

Zamiast pochodnej kąta skręcenia φ' występuje bowiem pewna /tutaj nieokreślona/ funkcja $\nu(z)$. Prócz tego $\omega_p(s)$ jest współrzędną wycinkową dla przekroju zamkniętego, określoną zgodnie z formułą /2.11/ z poprzedniego rozdziału

$$\omega_p = \int_0^s h_p ds - \int_0^s \tilde{\tau} ds \quad /3.3/$$

Wymienione różnice wynikają z przyjęcia innego założenia o deplanacji.

Odształcenia oblicza się przez różniczkowanie zależności /3.1/, /3.2/

$$\varepsilon_z = \frac{\partial w}{\partial z} = w_0' - \eta_p'' y - \xi_p'' x - \nu' \omega_p \quad /3.4/$$

$$\gamma_{zs} = \frac{\partial v}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial s} = \varphi' h_p - \nu \dot{\omega}_p \quad /3.5/$$

gdzie

$$\dot{\omega}_p = \frac{d\omega_p}{ds} = h_p - \tilde{\tau} \quad /3.6/$$

We wzorze /3.5/ pomija się odkształcenia postaciowe związane ze zginaniem, co się zwykle czyni w teorii belek.

Przyjmując /zgodnie z założeniem o nieodkształcalności przekroju poprzecznego/,

ze $\varepsilon_s - \varepsilon_n = 0$, otrzymuje się

$$\sigma = E \frac{\partial w}{\partial z} = E (w_0' - \eta_p'' y - \xi_p'' x - \nu' \omega_p) \quad /3.7/$$

oraz wzór na naprężenia styczne

$$\tau = G (\varphi' h_p - \nu \dot{\omega}_p) \quad /3.8/$$

Siły wewnętrzne N, M_x, M_y otrzymuje się po podstawieniu /3.7/ i /3.8/ pod odpowiednie całki

$$\begin{aligned} N &= \int_F \sigma dF = E F w_0' - E S \omega_p \nu' \\ M_x &= \int_F \sigma x dF = -E I_{xx} \xi_p'' - E I_{x\omega p} \nu' \\ M_y &= \int_F \sigma y dF = -E I_{yy} \eta_p'' - E I_{y\omega p} \nu' \\ T_p &= \int_F \tau h_p dF = G \varphi' \int_F h_p^2 dF - G \nu \int_F h_p \dot{\omega}_p dF \end{aligned} \quad /3.9a-d/$$

We wzorach /3.9a-c/ uwzględniono, że układ współrzędnych x, y jest głównym centralnym układem przekroju poprzecznego pręta. Wielkości $I_{xx}, I_{yy}, I_{x\omega p}, I_{y\omega p}$ oblicza się według wzorów /1.38/ dla przekroju otwartego /oczywiście ω_p jest w tym przypadku współrzędną wycentrowaną dla przekroju zamkniętego, obliczoną zgodnie z wzorem /3.3/. Uwzględniając dalej zależność /3.6/, można wzór na moment skręcający T_p przekształcić do postaci

$$T_p = G I_{hhp} \varphi' - G (I_{hhp} - K) \nu$$

gdzie

$$\begin{aligned} I_{hhp} &= \int_F h_p^2 dF \\ K &= \int_F \tilde{\tau} h_p dF = \sum_{i=1}^m \tilde{q}_i \int_{s_i} h_p ds = 2 \sum_{i=1}^n A_i \tilde{q}_i \end{aligned} \quad /3.10a-c/$$

I_{hhp} nazywa się biegunowym momentem bezwładności względem bieguna P , zaś K - stałą skręcania przekroju.

Dla przekrojów wzdłużnie uźebrowanych przyjmuje się, że powierzchnia przekroju żeber nie wpływa na naprężenia styczne. Pole przekroju usztywnień wzdłużnych traktuje się w obliczeniach jako skupione w odpowiednich punktach linii środkowej profilu, a usztywnienia nie wpływają na rozkład naprężeń stycznych. Wynika stąd, że w obliczeniach I_{hhp} i K nie uwzględnia się powierzchni prze-

kroju usztywnień wzdłużnych.

Niewiadome funkcje określa się na podstawie warunków równowagi elementu pręta. Podstawiając wyrażenie /3.9/ na siły wewnętrzne do warunków równowagi /1.51/ otrzymuje się

$$EFw''''$$

$$-ES_{\omega P} \mathcal{V}' = -p_z$$

$$EI_{xx} \xi_p^{IV}$$

$$-EI_{x\omega P} \mathcal{V}' = m'_x + p_x$$

$$EI_{yy} \eta_p^{IV}$$

$$-EI_{y\omega P} \mathcal{V}' = m'_y + p_y$$

$$GI_{hhP} \varphi'' - G(I_{hhP} - K) \mathcal{V}' = -m_p$$

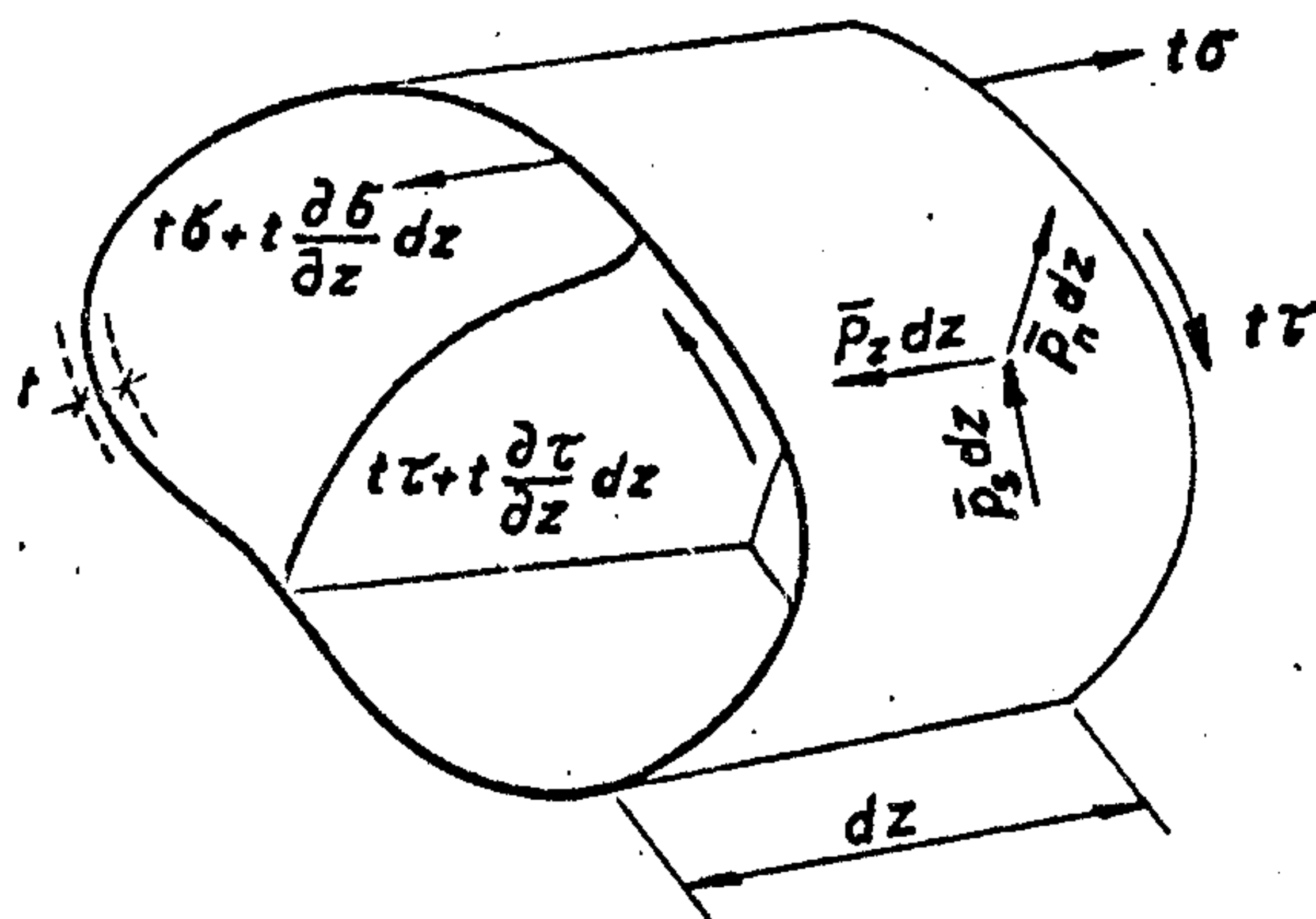
/3.11a-d/

Brakujące równanie /są bowiem 4 równania i 5 niewiadomych funkcji/ określa się na podstawie zasady prac przygotowanych. Rozważa się element pręta obciążony siłami wewnętrznymi w przekrojach granicznych $z = \text{const}$ i $z + dz = \text{const}$ /rys. 3.1/. Zewnętrzne obciążenia tworzą składowe: $\bar{p}_z$ /rzut na kierunek osi pręta/, $\bar{p}_s$ /rzut na kierunek styczny do linii środkowej profilu/ i $\bar{p}_n$ /rzut na kierunek normalny do powierzchni środkowej/.

Praca sił zewnętrznych na przemieszczeniu przygotowanym $w = \omega_p$, które odpowiada stanowi przemieszczeń uogólnionych $\mathcal{V} = -1$, zgodnie z wzorem /3.2/ na jednostkę długości pręta, wynosi

$$\int_F \frac{\partial \sigma}{\partial z} \omega_p dF + \oint \bar{p}_z \omega_p ds$$

/3.12/



Rys. 3.1

Odpowiadająca praca sił wewnętrznych sprowadza się do pracy sił stycznych

$$\int \tau \bar{\gamma} dF$$

gdzie $\bar{\gamma}$ jest odkształceniem postaciowym wywołanym przemieszczeniem $w = \omega_p$.
Uwzględniając, że $\bar{\gamma} = \frac{\partial w}{\partial s}$ oraz zależność /3.5/, otrzymuje się

$$\bar{\gamma} = \frac{\partial w}{\partial s} = \frac{d\omega_p}{ds} = \dot{\omega}_p = h_p - \tilde{\tau}$$

oraz

$$\int_F \tau \bar{\gamma} dF = \int_F \tau \dot{\omega}_p dF \quad /3.13/$$

Dla założonego przemieszczenia ω_p musi być spełniony warunek, że praca sił zewnętrznych równa jest przyrostowi pracy odkształcenia, tj.

$$\int_F \frac{\partial \sigma}{\partial z} \omega_p dF - \int_F \tau \dot{\omega}_p dF + \int_s \bar{p}_z \omega_p ds = 0 \quad /3.14/$$

Przez podstawienie zależności /3.7/ na naprężenia normalne i /3.8/ na naprężenia styczne do równania /3.14/ otrzymuje się ostatecznie

$$ES_{\omega p} w_o'' - EI_{x\omega p} \xi_p''' - EI_{y\omega p} \eta_p''' - EI_{\omega\omega p} v'' - \\ - G(I_{hhp} - K)(\varphi' - \mathcal{V}) = -m_{\omega p} \quad /3.15/$$

W wyprowadzeniu powyższego równania można wyróżnić następujące etapy:

Zgodnie z wzorem /3.6/ otrzymuje się:

$$\int_F \dot{\omega}_p^2 dF = \int_F (h_p - \tilde{\tau})^2 dF = \int_F h_p^2 dF - 2 \int_F h_p \tilde{\tau} dF + \int_F \tilde{\tau}^2 dF$$

lub /po uwzględnieniu wyrażen /3.10b-c/

$$\int_F \dot{\omega}_p^2 dF = I_{hhp} - 2K + \int_F \tilde{\tau}^2 dF$$

z kolei można udowodnić, że

$$\int_F \tilde{\tau}^2 dF = 2 \sum_{i=1}^n A_i \tilde{q}_i = K$$

stąd ostatecznie otrzymuje się

$$\int_F \dot{\omega}_p^2 dF = I_{hhp} - K$$

Z równania /3.11d/ wynika bezpośrednio zależność

$$\mathcal{V}' = \frac{I_{hhp}}{I_{hhp} - K} \varphi'' + \frac{m_p}{G(I_{hhp} - K)} \quad /3.16/$$

Z równań /3.11a-c/ łatwo można wyeliminować v' wykorzystując zależność /3.16/. W celu wyeliminowania v' z równania /3.11a/ należy równanie to dwukrotnie zróżniczkować stronami względem z , zaś równanie /3.15/ jednokrotnie i wyeliminować v'''' i v' korzystając z wyrażenia /3.16/.

W przypadku przekroju monosymetrycznego należy wziąć pod uwagę, że

$$S_{\omega P} = 0, \quad I_{y\omega P} = 0$$

jeżeli punkt P leży na osi symetrii przekroju. Wówczas równania różniczkowe znacznie się upraszczają, podobnie jak w przypadku prętów o przekroju otwartym. Po wyeliminowaniu v otrzymuje się następujący układ równań

$$\begin{aligned} EF\omega''_0 &= 0 \\ EF_{xx}\xi_P^{IV} - \rho_P EI_{x\omega P} \varphi'' &= p_x + \rho_P \frac{E_{x\omega P}}{GI_{hhP}} m_P \\ EI_{yy}\eta_P^{IV} &= p_y \\ EI_{x\omega P}\xi_P^{IV} + \rho_P EI_{\omega\omega P} \varphi^{IV} - GK\varphi'' &= m_P - \rho_P \frac{EI_{\omega\omega P}}{GI_{hhP}} m_P'' \end{aligned} \quad /3.17a-d/$$

W powyższych równaniach założono dodatkowo, że brak jest obciążeń osiowych rozłożonych na powierzchni środkowej pręta, tj. $\bar{p}_z = 0^{*/}$ oraz wprowadzono bezwymiarowy współczynnik $\rho_P > 1$

$$\rho_P = \frac{I_{hhP}}{I_{hhP-K}} \quad /3.18/$$

Lewe strony równań /3.17/ mają identyczną postać jak równania /1.42/, a dla prętów o otwartym przekroju różnią się jedynie pojawieniem się współczynnika ρ_P przy φ'' w równaniu /3.17b/ oraz przy φ^{IV} w równaniu /3.17d/.

W przypadku, gdy biegun P pokrywa się ze środkiem ścinania przekroju D , równania /3.17b/ i /3.17d/ stają się niezależne, gdyż wtedy $I_{x\Omega} = 0$ /z definicji środka ścinania/.

Równanie skręcania ma wówczas postać

$$E(\rho I_{\Omega\Omega})\varphi^{IV} - GK\varphi'' = m_D - \frac{E(\rho I_{\Omega\Omega})}{GI_{hh}} m_D'' \quad /3.19/$$

Gdy intensywność momentów skręcających jest stała, bądź liniowo zmienna, to również prawa strona równania /3.19/ ma identyczną postać jak w równaniu dla pręta o przekroju otwartym

$$EI_{\Omega\Omega}^{\circ} \varphi^{IV} - GK \varphi'' = m_D \quad /3.20/$$

gdzie: $I_{\Omega\Omega}^{\circ} = \rho I_{\Omega\Omega}$

Funkcję v rozkładu deplanacji w można wyrazić przez kąt skręcenia φ pręta. Z równania /3.15/ otrzymuje się /w przypadku, gdy punkt P pokrywa się ze środkiem ścinania D /

$$v = \varphi' + \frac{EI_{\Omega\Omega}}{G(I_{hh}-K)} v''$$

Z powyższego wyrażenia można wyeliminować v'' wykorzystując równanie /3.11d/, po zróźniczkowaniu względem z

$$v = \varphi' + \frac{1}{k_{II}^2} \varphi''' + \frac{1}{G(I_{hh}-K)} \frac{1}{k_I^2} m_D' \quad /3.21/$$

gdzie

$$k_I^2 = \frac{GI_{hh}}{EI_{\Omega\Omega}^{\circ}} \quad \text{oraz} \quad k_{II}^2 = \frac{G(I_{hh}-K)}{EI_{\Omega\Omega}^{\circ}} \quad /3.22/$$

W rozpatrywanym przypadku /gdy punkt P pokrywa się ze środkiem ścinania przekroju D / moment skręcający T i bimoment M_{Ω} oblicza się według wzorów

$$T = \int_F \tau h dF = GI_{hh} \varphi' - G(I_{hh}-K) v \quad /3.23/$$

oraz

$$M_{\Omega} = \int_F \sigma \Omega dF = -EI_{\Omega\Omega} v' \quad /3.24/$$

Biorąc pod uwagę zależności /3.16/ i /3.21/ można wyeliminować v i v' z powyższych wzorów

$$T = GK \varphi' - EI_{\Omega\Omega}^{\circ} \varphi''' - \frac{m_D'}{k_I^2} \quad /3.25/$$

oraz

$$M_{\Omega} = -EI_{\Omega\Omega}^{\circ} \varphi'' - \frac{m_D}{k_I^2} \quad /3.26/$$

Naprężenia styczne τ i normalne σ można przedstawić w zależności od momentu skręcającego i bimomentu, podobnie jak naprężenia dla prętów o przekroju otwartym. Z równań /3.16, 3.21, 3.7, 3.8/ wynikają następujące zależności

$$\tau = \tilde{\tau} G \varphi' - \frac{\tilde{\Omega}}{I_{hh}-K} \left(EI_{\Omega\Omega}^{\circ} \varphi''' + \frac{m_D'}{k_I^2} \right) \quad /3.27/$$

$$\sigma = -\rho E \varphi'' \Omega - \frac{E}{G} \frac{m_D}{I_{hh}-K} \Omega \quad /3.28/$$

Uwzględniając równanie /3.26/ można wzór /3.28/ na naprężenia normalne przekształcić do postaci

$$\sigma = \frac{M_{\Omega}}{I_{\Omega\Omega}} \Omega \quad /3.29/$$

Moment skręcający T można przedstawić w postaci sumy dwóch składników: momentu czystego skręcania

$$T_s = GK \varphi' \quad /3.30/$$

oraz momentu giętno-skrętnego

$$T_{\Omega} = -EI_{\Omega\Omega} \varphi'' - \frac{m_D}{k_I^2} \quad /3.31/$$

Uwzględniając powyższe zależności, wyrażenie /3.27/ można przekształcić do postaci

$$\tau = \frac{T_s}{K} \tilde{\tau} + T_{\Omega} \frac{\dot{\Omega}}{I_{hh} - K} \quad /3.32/$$

Porównując zależności /2.4/ i /3.27/ można stwierdzić, że pierwszy składnik wzoru /3.32/ określa styczne naprężenia od czystego skręcania.

$$\tau_s = G \varphi' \tilde{\tau} = \frac{T_s}{K} \tilde{\tau} \quad /3.33/$$

Drugi składnik wzoru /3.32/ wyraża naprężenia styczne τ_w , związane ze skrępowanym skręcaniem

$$\tau_w = T_{\Omega} \frac{\dot{\Omega}}{I_{hh} - K} \quad /3.34/$$

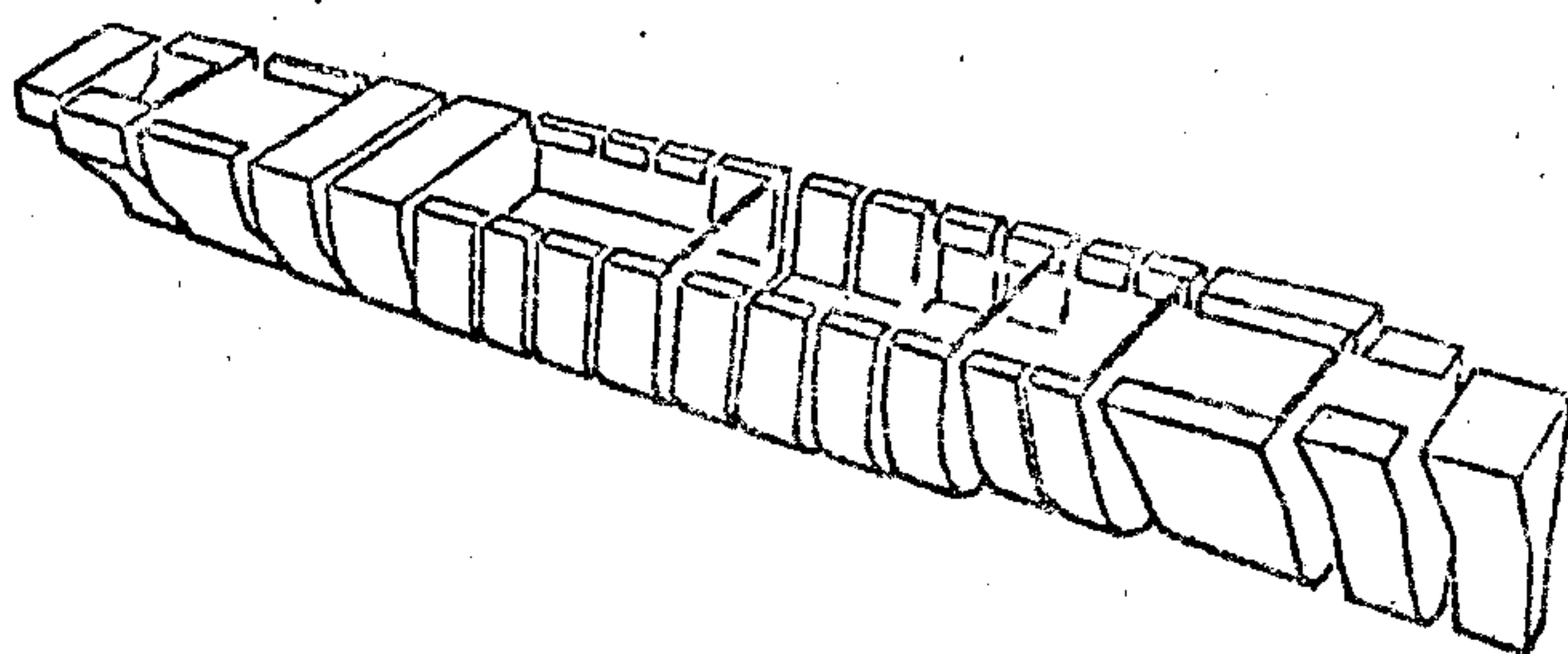
Należy podkreślić, że funkcja

$$\frac{\dot{\Omega}}{I_{hh} - K}$$

rozkładu naprężeń stycznych τ_w otrzymana została w wyniku założenia o rozkładzie deplanacji, przyjętego na wstępie niniejszego rozdziału. Przyjmuje się jednak, że rozkład naprężeń stycznych $\tau_w = \frac{q_w}{t}$ jest zgodny z formułą /2.28/, natomiast T_{Ω} oblicza się według wzoru /3.31/.

4. ZASTOSOWANIE METODY MACIERZY PRZEJŚCIA DO OBLICZEŃ WYTRZYMAŁOŚCI OGÓLNEJ KADŁUBA

Kadłub statku jest rozpatrywany jako cienkościenna belka o zmiennym przekroju, reprezentowana przez pewną liczbę elementów o stałym przekroju /rys. 4.1/. Przyjmując warunki ciągłości przemieszczeń i równowagi sił wewnętrznych w przekrojach między elementami /macierz przejścia przez przekrój/, odpowiednie równania różniczkowe mogą być rozwiązane dla każdego elementu tak, jak równania dla belki o stałym przekroju /macierz przejścia przez element/. Przy zastosowaniu komputera, metoda macierzy przejścia jest efektywnym i ekonomicznym sposobem obliczania wytrzymałości ogólnej kadłuba statku.



Rys. 4.1

Dalej będzie się zakładać, że konstrukcja kadłuba jest symetryczna względem płaszczyzny diametralnej. Wynika stąd, że dla kadłuba o zmiennym przekroju zginanie pionowe można rozpatrywać niezależnie od skręcania i zginania poprzecznego, które są sprzężone /ze względu na to, że środki ścinania przekrojów nie leżą na jednej prostej/.

Przy wyprowadzeniu macierzy przejścia przez element zakłada się, że początek układu współrzędnych x, y leży w środku ciężkości przekroju G , zaś przemieszczenia określone są względem środka ścinania przekroju D , który jest środkiem skręcania elementu /rys. 4.2/. Obciążenia zewnętrzne są sprowadzone do środka ścinania przekroju. W takim przypadku skręcanie elementu można rozpatrywać niezależnie od zginania /równanie 3.20/. W obliczeniach odkształceń od zginania uwzględniono dodatkowo ścinanie elementu. Przyjmując dodatnie zwroty sił i przemieszczeń, zgodnie z rys. 4.2 i 4.3 /dodatni kąt skręcenia jest zgodny z ruchem wskazówek zegara, dla obserwatora patrzącego w kierunku dodatnim osi z /, otrzymuje się następujące zależności dla sił wewnętrznych i przemieszczeń ele-

mentu kadłuba o numerze n

$$\frac{dQ_x}{dz} = -p_x$$

$$\frac{dQ_y}{dz} = -p_y(z)$$

$$\frac{dM_x}{dz} = -Q_x$$

/4.1a-e/

$$\frac{dM_y}{dz} = -Q_y$$

$$\frac{d}{dz} (T_s + T_\Omega) = -m(z)$$

oraz

$$M_x = EI_{xx}^{(n)} \frac{d\psi}{dz}$$

$$M_y = EI_{yy}^{(n)} \frac{d\chi}{dz}$$

$$Q_x = GA_x^{(n)} \left(\frac{d\xi}{dz} - \psi \right)$$

$$Q_y = GA_y^{(n)} \left(\frac{d\eta}{dz} - \chi \right)$$

/4.2a-g/

$$T_s = GK^{(n)} \frac{d\varphi}{dz}$$

$$T_\Omega = -\rho_n EI_{\Omega\Omega}^{(n)} \frac{d^3\varphi}{dz^3} - \frac{1}{k_{I,n}^2} \frac{dm}{dz}$$

$$M_\Omega = -\rho_n EI_{\Omega\Omega}^{(n)} \frac{d^2\varphi}{dz^2} - \frac{m}{k_{I,n}^2}$$

gdzie: $EI_{xx}^{(n)}$ - sztywność zginania w płaszczyźnie xz

$EI_{yy}^{(n)}$ - sztywność zginania w płaszczyźnie yz

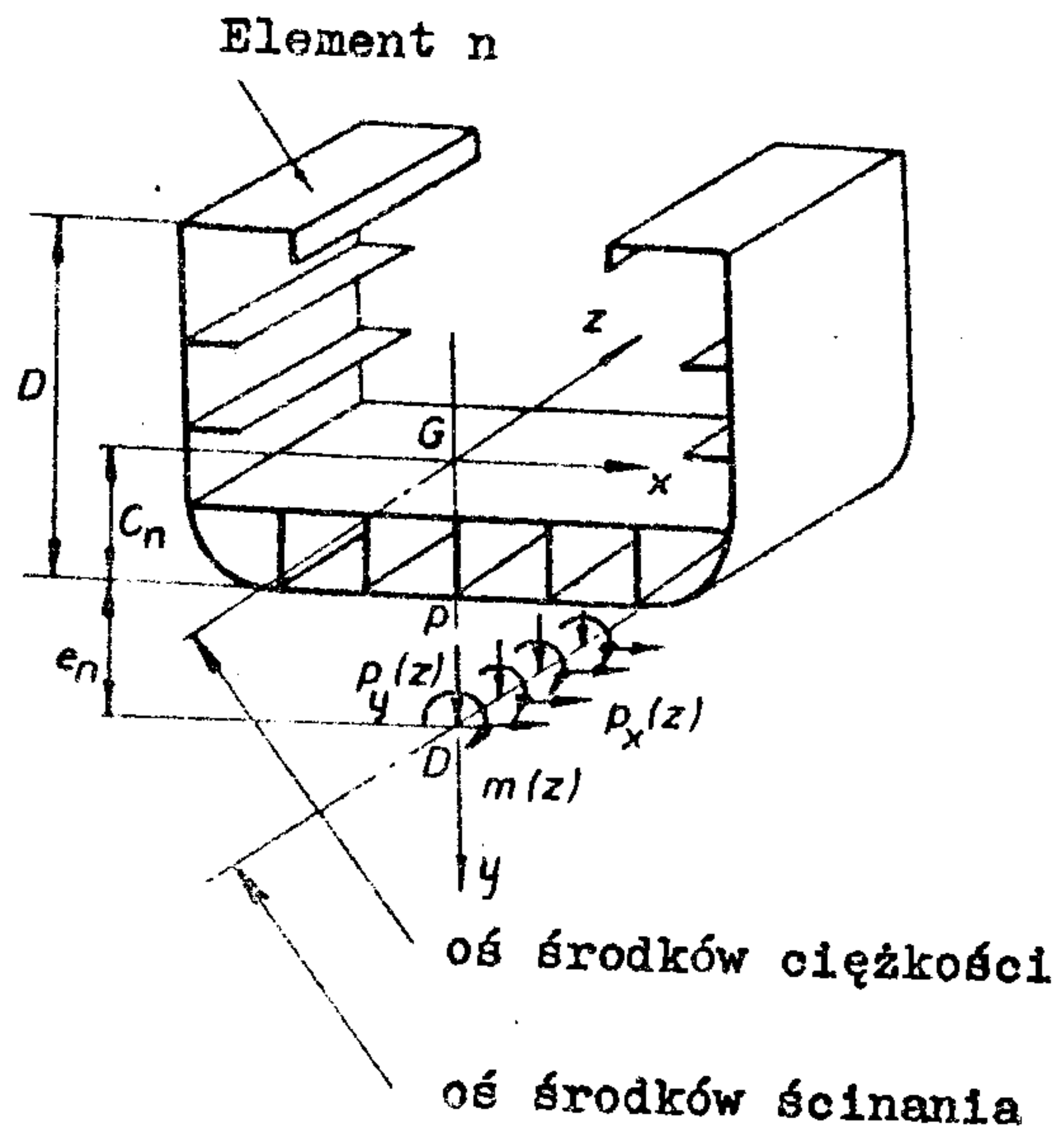
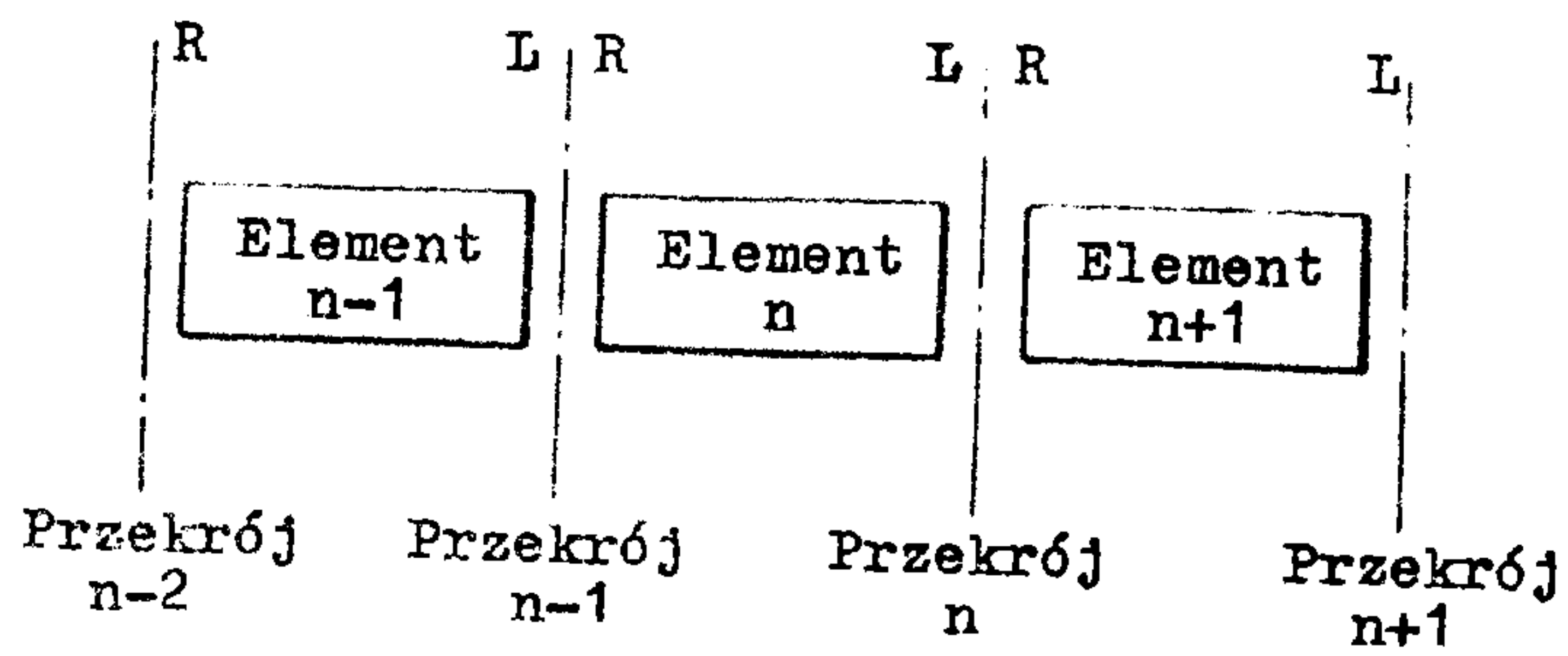
$GA_x^{(n)}$ - sztywność ze względu na ścinanie w płaszczyźnie xz

$GA_y^{(n)}$ - sztywność ze względu na ścinanie w płaszczyźnie yz

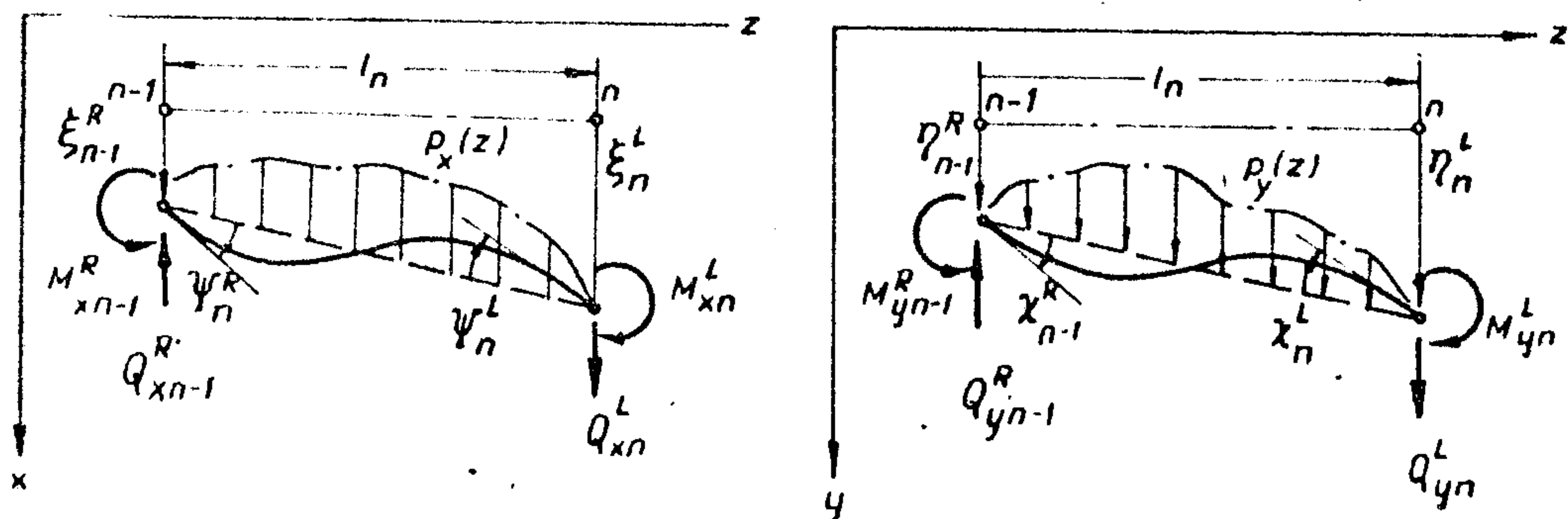
$GK^{(n)}$ - sztywność przy czystym skręcaniu

$\rho_n EI_{\Omega\Omega}^{(n)}$ - sztywność giętno-skrętna

$$K_{I,n}^2 = \frac{GI_{hh}^{(n)}}{\rho_n EI^{(n)} \omega_n^2} \quad ; \quad \rho_n = \frac{I_{hh}^{(n)}}{I_{hh}^{(n)} - K^{(n)}}$$

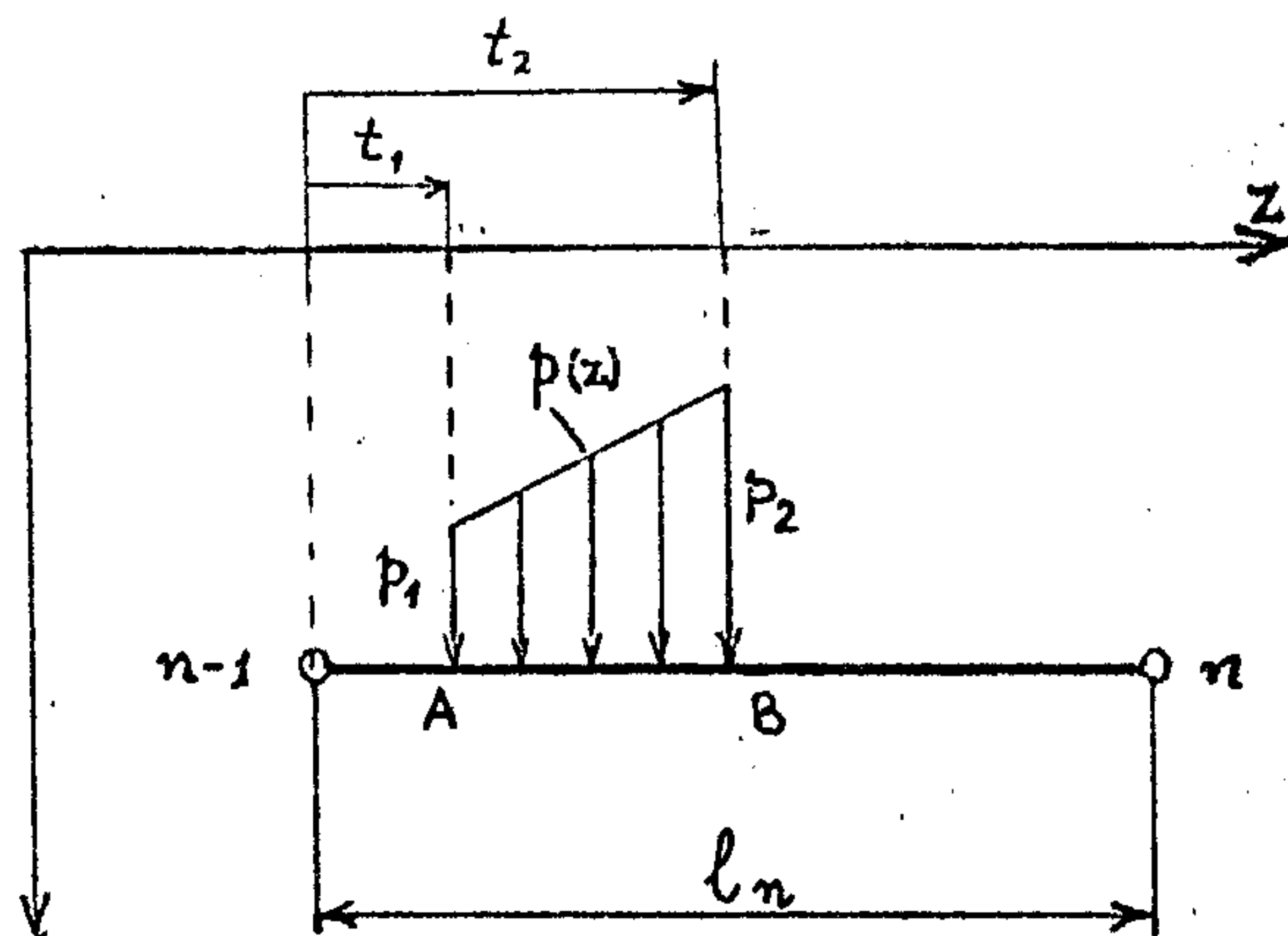


Rys. 4.2



Rys. 4.3

We wzorach /4.2a-g/ M_x i M_y oznaczają momenty zginające działające w płaszczyźnie xz i yz , a Q_x i Q_y - siły poprzeczne w płaszczyźnie xz i yz . ξ oraz η oznaczają przemieszczenia środka ścinania przekroju elementu w kierunku osi x oraz y , zaś ψ i χ obroty przekroju w płaszczyźnie xz i yz . φ jest kątem skręcenia przekroju elementu względem środka ścinania D . Indeks n oznacza numer elementu kadłuba, zaś l_n - jego długość. Zakłada się, że obciążenia zewnętrzne, działające na element n kadłuba, mają trapezowy rozkład i mogą być przyłożone w dowolnym miejscu na długości elementu n /rys.4.4/.



Rys. 4.4

Związek między parametrami stanu w skrajnych przekrojach elementu o numerze n ma postać

$$X_n^L = F_n X_{n-1}^R \quad /4.3/$$

gdzie F_n jest bezwymiarową macierzą przejścia przez element o numerze n

$$F_n = \begin{bmatrix} K_y & 0 & 0 & k_y \\ 0 & K_x & 0 & k_x \\ 0 & 0 & K_\varphi & k_\varphi \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_n \quad /4.4/$$

Wektory stanu, związane z przekrojem o numerze n można przedstawić w postaci bezwymiarowej:

$$X_{n-1}^R = \{ x^1, x^2, x^3, 1 \}_{n-1}^R$$

$$X_n^L = \{ x^1, x^2, x^3, 1 \}_n^L \quad /4.5a-b/$$

$$\begin{aligned} X^1 &= \left\{ \frac{\eta}{b^*}, \chi, \frac{b^* M_y}{EI_{yy}^*}, \frac{Q_y}{GA_y^*} \right\} \\ X^2 &= \left\{ \frac{\xi}{b^*}, \psi, \frac{b^* M_x}{EI_{xx}^*}, \frac{Q_x}{GA_x^*} \right\} \\ X^3 &= \left\{ \varphi, b^* v, \frac{M_\Omega}{GK^*}, \frac{b^* T}{GK^*} \right\} \end{aligned} \quad /4.6a-c/$$

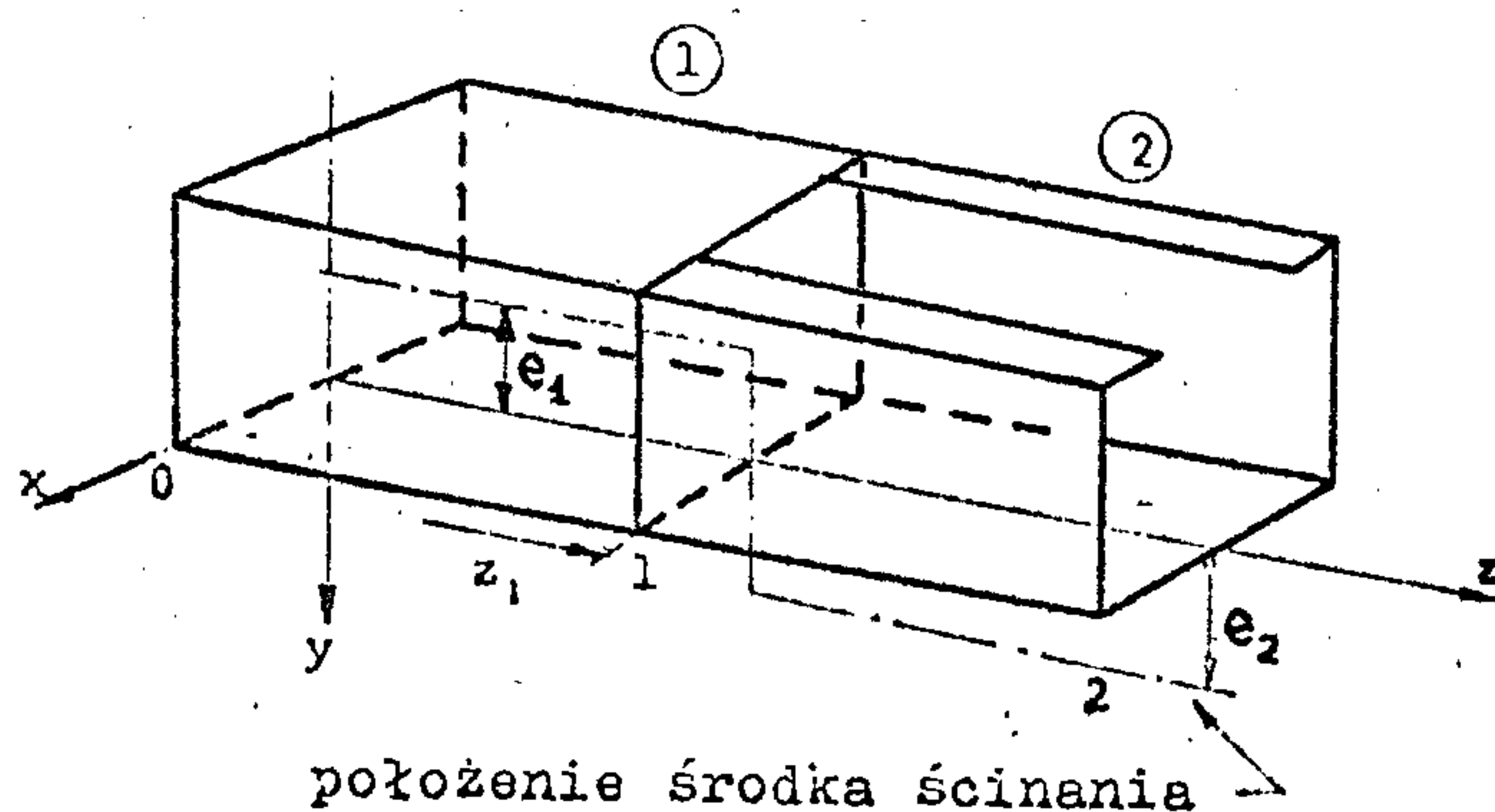
W powyższych wyrażeniach wielkości oznaczone gwiazdką /*/ są charakterystykami przekroju elementu kadłuba w rejonie śródkręcia, zaś b^* jest szerokością tego elementu. Indeksy R i L oznaczają odpowiednio prawą i lewą stronę przekroju granicznego n /rys. 4.2/. Elementy macierzy F_n zamieszczone są w załączniku A /s. 58/.

Zginanie w płaszczyźnie yz jest niezależne od skręcania i zginania w płaszczyźnie xz, z uwagi na założoną symetrię konstrukcji kadłuba względem płaszczyzny diametralnej statku. Warunki ciągłości przemieszczeń i równowagi sił wewnętrznych w kadłubie, w przekrojach między elementami można zapisać w postaci

$$\begin{aligned} \eta_n^R &= \eta_n^L \\ \chi_n^R &= \chi_n^L \\ Q_{y,n}^R &= Q_{y,n}^L - \bar{Q}_{y,n} \\ M_{y,n}^R &= M_{y,n}^L \end{aligned} \quad /4.7a-c/$$

gdzie $\bar{Q}_{y,n}$ jest skupioną siłą zewnętrzną działającą w kierunku y, przyłożoną w przekroju o numerze n.

Zginanie poprzeczne i skręcanie są sprzężone ze względu na to, że położenie osi środków ścinania jest na ogół różne dla elementów z prawej i lewej strony rozpatrywanego przekroju /rys. 4.5/.



Rys. 4.5

Warunki ciągłości przemieszczeń i równowagi sił wewnętrznych z lewej i z prawej strony przekroju granicznego o numerze n , obowiązują względem dowolnej osi odniesienia, wspólnej dla całego kadłuba. Wybierając np. oś odniesienia przechodzącą przez punkt P na wysokości płaszczyzny podstawowej /rys. 4.2/ otrzymuje się następujące zależności dla przemieszczeń i sił wewnętrznych z lewej i z prawej strony przekroju n :

$$\begin{aligned}\xi_{P,n}^R &= \xi_{P,n}^L \\ M_{\omega P,n}^R &= M_{\omega P,n}^L \quad \text{gdzie} \quad M_{\omega P} = \int_F \omega_P \sigma dF \\ T_{P,n}^R &= T_{P,n}^L\end{aligned}$$

Biorąc pod uwagę wzory na transformację przemieszczeń /1.4/ i pól wycinkowych /1.60/, przy zmianie położenia osi odniesienia, można powyższe równania przedstawić w postaci rozwiniętej.*

$$\begin{aligned}\xi_n^R &= \xi_n^L - \varphi_n^L (e_{n+1} - e_n) \\ M_{\Omega,n}^R &= M_{\Omega,n}^L + M_{x,n}^L (e_{n+1} - e_n) \\ T_n^R &= T_n^L + Q_{x,n}^L (e_{n+1} - e_n)\end{aligned} \quad /4.8a-c/$$

W powyższych równaniach wielkości z indeksem R określają odpowiednie parametry elementu $n+1$ w przekroju $z=0$, obliczone względem osi odniesienia przechodzącej przez środek ścinania tego elementu. Wielkości z indeksem L określają parametry elementu n w przekroju $z=l_n$, obliczone względem środka ścinania elementu n . Dla pozostałych parametrów w przekroju n przyjmuje się następujące warunki ciągłości i równowagi:

$$\begin{aligned}\varphi_n^R &= \varphi_n^L \\ \psi_n^R &= \psi_n^L \\ \nu_n^R &= \nu_n^L \\ M_{x,n}^R &= M_{x,n}^L \\ Q_{x,n}^R &= Q_{x,n}^L - \bar{Q}_{x,n}\end{aligned} \quad /4.8d-h/$$

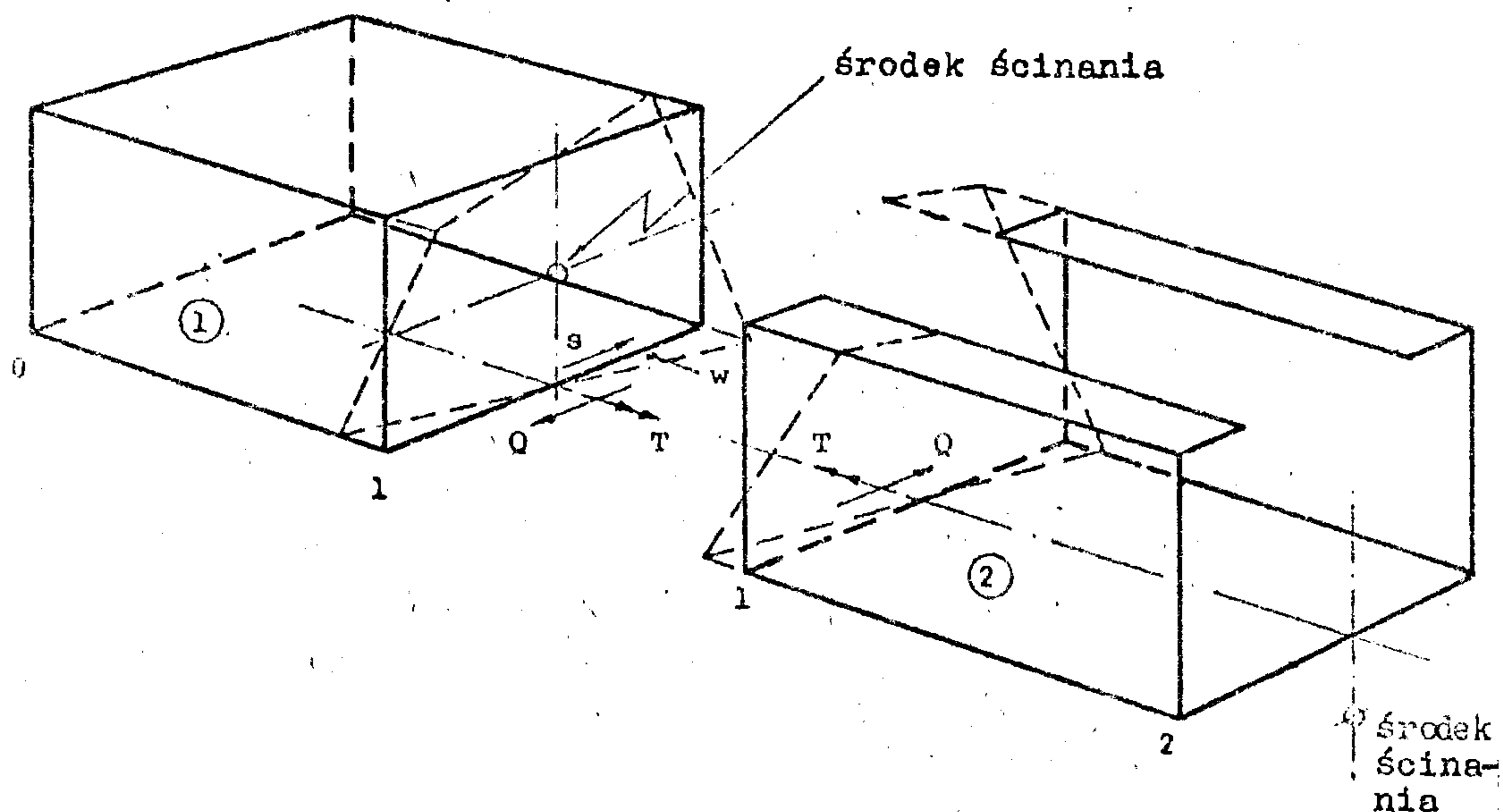
* / Wyprowadzenie zależności /4.8/ zamieszczono w załączniku B.

gdzie /podobnie jak przy zginaniu pionowym/ $\bar{Q}_{x,n}$ jest zewnętrzną siłą skupioną, przyłożoną w przekroju n .

Jeżeli kształty przekrojów poprzecznych elementów lewej i prawej strony rozpatrywanego przekroju różnią się zdecydowanie /np. w przypadku przedstawionym na rysunku 4.5/, to również współrzędne wycinkowe $\Omega(s)$ mają różną wielkość i rozkład po obu stronach tego przekroju. Aby otrzymać możliwie najlepsze spełnienie warunku ciągłości od deplanacji /rys. 4.6/ w przekroju granicznym, zakłada się, że jeden element kadłuba może przemieszczać się względem drugiego jako ciało sztywne i funkcja $\bar{v}(z)$ może być nieciągła w przekroju granicznym $z = z_1$, tj.

$$\bar{v}(z_1^+) = \alpha \bar{v}(z_1^-) \quad /4.9/$$

α jest współczynnikiem ciągłości deplanacji



Rys. 4.6

Naprężenia normalne przy skrępowanym skręcaniu są związane z bimomentem zgodnie z formułą /3.29/

$$\sigma(z,s) = \frac{M_{\Omega}(z)}{I_{\Omega\Omega}} \Omega(s)$$

W rozpatrywanym przypadku ciągłość naprężeń w każdym punkcie przekroju granicznego $z = z_1$ nie może być zachowana /ze względu na różny rozkład i wielkość współrzędnych wycinkowych $\Omega(s)$ po obu stronach tego przekroju/. Można jednak spełnić warunek ciągłości naprężeń "w średnim" przyrównując pracę wykonaną przez naprężenia na przemieszczeniu przygotowanym $\bar{v}^L = \bar{v}(z_1^-)$ dla obu przekrojów.

$$\left(\int_F \bar{w} \sigma dF \right)^R = \left(\int_F \bar{w} \sigma dF \right)^L$$

Uwzględniając, że $\bar{w}^R = \alpha \bar{v}^L \Omega$ otrzymuje się:

$$M_{\Omega}(z_1^+) = \frac{1}{\alpha} M_{\Omega}(z_1^-) \quad /4.10/$$

W celu określenia współczynnika α , dla którego będzie spełniony integralny warunek ciągłości deplanacji, przyjmuje się następujące założenia:

- I/ dodatkowe naprężenia $\Delta \sigma(s)$, niezbędne dla zapewnienia ciągłości deplanacji "w średnim" w przekroju $z = z_1$, są lokalne i nie wpływają na naprężenia i deformacje, poza małym rejonem w pobliżu nieciągłości przekroju;
- II/ naprężenia $\Delta \sigma(s)$ są wprost proporcjonalne do luki powstałej wskutek różnego rozkładu i wielkości deplanacji w dla obu elementów.

Naprężenia $\Delta \sigma$ mogą być lokalne, ponieważ ich rozkład różni się od rozkładu naprężeń σ obu elementów sąsiednich.

Współczynnik ciągłości deplanacji α oblicza się praktycznie według wzoru */

$$\alpha \approx \sqrt{\frac{I_{\Omega\Omega}(z_1^-)}{I_{\Omega\Omega}(z_1^+)}} \quad /4.11/$$

Uwzględniając powyższe rozważania, można podać dla dowolnego przekroju następujące warunki ciągłości przemieszczeń i sił uogólnionych:

$$\xi_n^R = \xi_n^L - \gamma_n^L (e_{n+1} - e_n)$$

$$\psi_n^R = \psi_n^L$$

$$M_{x,n}^R = M_{x,n}^L$$

/4.12a-f/

$$Q_{x,n}^R = Q_{x,n}^L - \bar{Q}_{x,n}$$

$$\varphi_n^R = \varphi_n^L$$

$$v_n^R = \alpha_n v_n^L$$

*/ Wyprowadzenie zamieszczono w załączniku C.

$$\begin{aligned} M_{\Omega,n}^R &= \frac{1}{\alpha_n} M_{\Omega,n}^L + M_{x,n}^L (e_{n+1} - e_n) - \bar{M}_{\Omega,n} \\ T_n^R &= T_n^L + Q_{x,n}^L (e_{n+1} - e_n) - \bar{T}_n \end{aligned} \quad /4.12g,h/$$

gdzie symbole oznaczone poziomą kreską u góry oznaczają odpowiednie skupione obciążenia zewnętrzne w przekroju n .

Warunki te różnią się od podanych w pracy [6] jedynie tym, że zamiast pochodnej kąta skręcenia φ' występuje współczynnik deplanacji ψ /zgodnie z teorią podaną w rozdziale 3/. Należy podkreślić, że nawet w przypadku braku momentu zginającego $/M_x = 0/$ pojawiają się przemieszczenia poziome ξ środków ścinania elementów, ze względu na warunek /4.12a/. W przypadku braku obciążeń skręcających $/T = 0/$, pojawia się bimoment /a zatem i kąt skręcenia/ ze względu na warunek /4.12g/.

Warunki ciągłości i równowagi /4.12/ można przedstawić w postaci bezwymiarowej

$$X_n^R = P_n X_n^L \quad /4.13/$$

Bezwymiarowa macierz P_n przejścia przez przekrój n zamieszczona jest w załączniku D.

Przyjmuje się następujące warunki brzegowe dla kadłuba statku:

Przekrój rufowy

Przekrój dziobowy

- 1/ $\xi = 0$
- 2/ $\eta = 0$
- 3/ $\psi = 0$
- 4/ $\varphi = 0$
- 5/ $Q_x = -\bar{Q}_x$
- 6/ $Q_y = -\bar{Q}_y$
- 7/ $M_x = 0$
- 8/ $M_y = 0$
- 9/ $T = -\bar{T}$
- 10/ $M_{\Omega} = -\bar{M}_{\Omega}$

- 11/ $\eta = 0$
- 12/ $M_{\Omega} = \bar{M}_{\Omega}$

/4.14/

Łatwo ustalić związek między wektorami stanu w przekrojach końcowych kadłuba. Oznaczając przez $X_A = X_0^R$ wektor stanu dla przekroju rufowego $/n=0/$,

spełniający warunki brzegowe od 1 do 10 oraz przez $X_F = X_N$ wektor stanu dla przekroju dziobowego / $N =$ liczbie elementów kadłuba /, spełniający warunki brzegowe 11, 12, otrzymuje się równanie

$$X_N^L = F_N \{ P_{N-1} F_{N-1} \} \dots \{ P_2 F_2 \} \{ P_1 F_1 \} X_0^R$$

lub w postaci

$$X_F = F X_A \quad /4.15/$$

gdzie

$$F = F_N \{ P_{N-1} F_{N-1} \} \dots \{ P_2 F_2 \} \{ P_1 F_1 \} \quad /4.16/$$

jest macierzą przejścia dla całego kadłuba. Z równania /4.15/ oblicza się niewiadome elementy wektorów stanu X_F i X_A w przekroju dziobowym i rufowym. Następnie można obliczyć przemieszczenia i siły wewnętrzne w przekroju z elementu kadłuba o numerze i

$$X_i^L(z) = F_i(z) \{ P_{i-1} F_{i-1} \} \dots \{ P_2 F_2 \} \{ P_1 F_1 \} X_A \quad /4.17/$$

Znając siły wewnętrzne i odpowiednie charakterystyki przekroju elementu można obliczyć naprężenia. Naprężenia normalne σ i styczne τ są algebraiczną sumą następujących naprężeń składowych:

σ_V, σ_H od zginania w płaszczyźnie pionowej i poziomej

τ_V, τ_H od ścinania w płaszczyźnie pionowej i poziomej

τ_S od czystego skręcania

σ_W, τ_W od skrępowanego skręcania.

Przedstawiony w niniejszej pracy algorytm może być realizowany wyłącznie w oparciu o dużą maszynę liczącą. W Ośrodku Mechaniki Konstrukcji Okrętu Centrum Techniki Okrętowej jest opracowywany odpowiedni program obliczeniowy, który zapewniając niezbędną dokładność wyników wymagać będzie znacznie mniejszego nakładu pracy niż bezpośrednie modelowanie problemu ogólną metodą elementów skończonych.

BIBLIOGRAFIA

1. Kollbrunner C.F., Hajdin N.: Wölbkrafttortion dünnwandiger Stäbe mit offenen Profil. Cz. I. Mitteilungen der T.K.S.S.V. Z. 29. Verlag S.S.V. Zürich.
2. Kollbrunner C.F., Hajdin N.: Wölbkrafttortion dünnwandiger Stäbe mit geschlossenem Profil. Mitteilungen der T.K.S.S.V. Z. 32. Verlag S.S.V. Zürich.
3. Vlasov B.Z.: Tonkostennye uprugie steržni. Gos. Izd. Fiz-Mat. Lit. Moskva 1959.
4. Haslum K., Tonnessen A.: An analysis of torsion in ship hulls. Europ. Ship-build. 1972.nr 5/6.
5. Steneroth E.R., Ulfvarson A.Y.I.: The snaking of open ships. Int. Shipbuild. Prog. 1976.T. 23 nr 257.
6. Shimizu S., Yoshima H.: Study of the longitudinal strength of ships with torsional and horizontal deformations. Paper prepared for ISSC 1976.

Załącznik A

Elementy blokowej macierzy F_n przejścia przez element kadłuba o numerze n

$$K_y(z) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z}{b^*} & \frac{EI_{yy}^*}{EI_{yy}^{(n)}} \cdot \frac{z^2}{2b^{*2}} & \frac{GA_y^*}{GA_y^{(n)}} \left(\frac{z}{b^*} - \frac{GA_y^{(n)}}{EI_{yy}^{(n)}} \frac{z^3}{6b^*} \right) \\ 0 & 1 & \frac{EI_{yy}^*}{EI_{yy}^{(n)}} \cdot \frac{z^2}{b^*} & - \frac{GA_y^*}{EI_{yy}^{(n)}} \frac{z^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & - \frac{GA_y^*}{EI_{yy}^{(n)}} b^* z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_x(z) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{z}{b^*} & \frac{EI_{xx}^*}{EI_{xx}^{(n)}} \cdot \frac{z^2}{2b^{*2}} & \frac{GA_x^*}{GA_x^{(n)}} \left(\frac{z}{b^*} - \frac{GA_x^{(n)}}{EI_{xx}^{(n)}} \frac{z^3}{6b^*} \right) \\ 0 & 1 & \frac{EI_{xx}^*}{EI_{xx}^{(n)}} \cdot \frac{z}{b^*} & - \frac{GA_x^*}{EI_{xx}^{(n)}} \cdot \frac{z^2}{2} \\ 0 & 0 & 1 & - \frac{GA_x^*}{EI_{xx}^{(n)}} b^* z \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$K_\varphi(z) = \begin{bmatrix} 1 & \frac{sh\ kz}{kpb^*} & \frac{GK^*}{GK^{(n)}} (1 - ch\ kz) & \frac{GK^*}{GK^{(n)}} \left(\frac{z}{b^*} - \frac{sh\ kz}{kpb^*} \right) \\ 0 & ch\ kz & - \frac{GK^*}{GK^{(n)}} kpb^* sh\ kz & \frac{GK^*}{GK^{(n)}} (1 - ch\ kz) \\ 0 & - \frac{GK^{(n)}}{GK^*} \frac{sh\ kz}{kpb^*} & ch\ kz & \frac{sh\ kz}{kpb^*} \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$k_y(z) = \begin{cases} 0 & \text{dla } z \leq t_1 \\ k_y(z-t_1) & \text{dla } t_1 \leq z \leq t_2 \\ k_y(z-t_1) - k_y(z-t_2) & \text{dla } t_2 \leq z \end{cases}$$

analogicznie dla $k_x(z)$ i $k_\varphi(z)$

gdzie:

$$k = \sqrt{\frac{GK^{(n)}}{\rho EI_{\Omega\Omega}^{(n)}}} \quad \Delta p_y = p_{2y} - p_{1y}$$

$$\rho = \frac{I_{hh}^{(n)}}{I_{hh}^{(n)} - K^{(n)}} \quad \Delta p_x = p_{2x} - p_{1x}$$

$$\Delta m = m_2 - m_1$$

t_1 i t_2 określają położenie obciążenia trapezowego przyłożonego do rozpatrywanego elementu o numerze n /rys. 4.4/.

$$k_y(z-t_1) = \left[\begin{aligned} & \frac{(z-t_1)^4}{120 EI_{yy}^{(n)} b^*} \left(5 p_{1y} + \frac{z-t_1}{t_2-t_1} \Delta p_y \right) - \frac{(z-t_1)^2}{GA_y^{(n)} b^*} \left(3 p_{1y} + \frac{z-t_1}{t_2-t_1} \Delta p_y \right) \\ & \frac{(z-t_1)^3}{24 EI_{yy}^{(n)}} \left(4 p_{1y} + \frac{z-t_1}{t_2-t_1} \Delta p_y \right) \\ & \frac{b^*(z-t_1)^2}{6 EI_{yy}^*} \left(3 p_{1y} + \frac{z-t_1}{t_2-t_1} \Delta p_y \right) \\ & - \frac{z-t_1}{2 GA_y^*} \left(2 p_{1y} + \frac{z-t_1}{t_2-t_1} \Delta p_y \right) \end{aligned} \right]$$

$h_x(z-t_1) =$

$$\frac{(z-t_1)^4}{120EI_{xx}^{(n)}b^*} \left(5p_{1x} + \frac{z-t_1}{t_2-t_1} \Delta p_x \right) - \frac{(z-t_1)^2}{GA_x^{(n)}b^*} \left(3p_{1x} + \frac{z-t_1}{t_2-t_1} \Delta p_x \right)$$

$$\frac{(z-t_1)^3}{24EI_{xx}^{(n)}} \left(4p_{1x} + \frac{z-t_1}{t_2-t_1} \Delta p_x \right)$$

$$\frac{b^*(z-t_1)^2}{6EI_{xx}^*} \left(3p_{1x} + \frac{z-t_1}{t_2-t_1} \Delta p_x \right)$$

$$- \frac{z-t_1}{2GA_y^*} \left(2p_{1x} + \frac{z-t_1}{t_2-t_1} \Delta p_x \right)$$

$h_{\varphi}(z-t_1) =$

$$- \frac{1}{GK^{(n)}} \left\langle m_1 \left\{ \frac{(z-t_1)^2}{2} + \frac{1}{k^2 \rho} (1 - \operatorname{ch} k(z-t_1)) \right\} + \frac{\Delta m}{t_2-t_1} \left\{ \frac{(z-t_1)^3}{6} + \frac{1}{k^2 \rho} \left(z-t_1 - \frac{1}{k} \operatorname{sh} k(z-t_1) \right) \right\} \right\rangle$$

$$- \frac{b^*}{GK^{(n)}} \left\{ m_1 \left(z-t_1 - \frac{1}{k} \operatorname{sh} k(z-t_1) \right) + \frac{\Delta m}{t_2-t_1} \left[\frac{(z-t_1)^2}{2} + \frac{1}{k^2} (1 - \operatorname{ch} k(z-t_1)) \right] \right\}$$

$$- \frac{1}{k^2 \rho GK^*} \left\{ m_1 (\operatorname{ch} k(z-t_1) - 1) + \frac{\Delta m}{t_2-t_1} \left(\frac{1}{k} \operatorname{sh} k(z-t_1) - (z-t_1) \right) \right\}$$

$$- \frac{b^*}{GK^*} \left\{ m_1 (z-t_1) + \frac{\Delta m}{t_2-t_1} \frac{(z-t_1)^2}{2} \right\}$$

Załącznik B

Warunki ciągłości przemieszczeń i równowagi sił wewnętrznych z lewej i z prawej strony przekroju granicznego o numerze n .

Przemieszczenia poziome punktu P /rys. 4.2/ można uzależnić od przemieszczeń poziomych ξ środka ścinania D zgodnie z formułą /1.4/.

$$\xi_P = \xi + e \varphi$$

Przyrównując przemieszczenia poziome punktu P z lewej i z prawej strony przekroju n otrzymuje się

$$\xi_n^L + \varphi_n e_n = \xi_n^R + \varphi_n e_{n+1}$$

stąd:

$$\xi_n^R = \xi_n^L - \varphi_n (e_{n+1} - e_n)$$

gdzie ξ_n^L, ξ_n^R jest przemieszczeniem środka ścinania elementu z lewej i z prawej strony przekroju n

e_n, e_{n+1} współrzędna środka ścinania elementu z lewej i z prawej strony przekroju n .

Bimoment względem bieżuna w punkcie P oblicza się z definicji wg wzoru

$$M_{\omega P} = \int_F \sigma \omega_P dF$$

Biorąc pod uwagę zależność /1.30/ otrzymuje się

$$M_{\omega P} = -EI_{x\omega P} \xi'' - EI_{\omega\omega P} \varphi''$$

uwzględniając dalej, że zgodnie z prawem transformacji pól wycinkowych /1.60/ obowiązuje

$$\omega_P = \Omega - ex$$

$$I_{x\omega P} = \int_F \omega_P x dF = -e I_{xx}$$

$$I_{\omega\omega P} = \int_F \omega_P \omega_P dF = I_{\Omega\Omega} + e^2 I_{xx}$$

oraz na podstawie /1.4/

$$\xi_p'' = \xi'' + e \varphi''$$

po prostych przekształceniach otrzymuje się

$$M_{\omega P} = M_{\Omega} - e M_x$$

gdzie

$$M_{\Omega} = \int_F \sigma \Omega dF = -EI_{\Omega\Omega} \varphi''$$

$$M_x = \int_F \sigma x dF = -EI_{xx} \xi'''$$

Porównując bimoment $M_{\omega P}$ z lewej i z prawej strony przekroju n otrzymuje się

$$M_{\Omega,n}^L - e_n M_{x,n} = M_{\Omega,n}^R - e_{n+1} M_{x,n}$$

stąd

$$M_{\Omega,n}^R = M_{\Omega,n}^L + (e_{n+1} - e_n) M_{x,n}$$

gdzie M_{Ω}^L oraz $M_{\Omega,n}^R$ jest bimomentem dla bieguna w środku ścinania elementu z lewej i z prawej strony przekroju n , $M_{x,n}$ jest momentem zginającym w przekroju.

Przyjmując dodatnie zwroty sił wewnętrznych jak na rys. 1.9 można uzależnić moment skręcający T_p względem punktu P od momentu skręcającego względem środka ścinania D

$$T_p = T - e Q_x$$

Przyrównując moment skręcający T_p z lewej i z prawej strony przekroju n otrzymuje się

$$T_n^L - e_n Q_{x,n} = T_n^R - e_{n+1} Q_{x,n}$$

skąd

$$T_n^R = T_n^L + Q_{x,n} (e_{n+1} - e_n)$$

gdzie T_n^L i T_n^R jest momentem skręcającym względem środka ścinania elementu z lewej i prawej strony przekroju n , $Q_{x,n}$ jest siłą poprzeczną w przekroju n .

Załącznik C

Współczynnik ciągłości deplanacji α

Zgodnie z założeniem II /str. 55/ dodatkowe naprężenia $\Delta \sigma(s)$ mogą być przedstawione w postaci

$$\Delta \sigma(s) = c (w^R(s) - w^L(s)) \quad /I/$$

$\Delta \sigma$ stanowią układ samozrównoważony, gdy praca wykonana na przemieszczeniach przygotowanych /odpowiadających rzeczywistym stopniom swobody/ jest równa zero

$$1/ \int \Delta \sigma (w^R + w^L) dF = 0$$

$$2/ \int \Delta \sigma dF = 0$$

/II/

$$3/ \int \Delta \sigma x dF = 0$$

$$4/ \int \Delta \sigma y dF = 0$$

gdzie F jest powierzchnią wspólną dla obu przekrojów.

Przemieszczenia wzdłużne obu przekrojów są określone względem płaszczyzny przekroju z lewej strony.

$$w^L(s) = -v^L \Omega^L(s)$$

$$w^R(s) = -v^L (\alpha \Omega^R(s) + Ax + By + C) \quad /III/$$

Przemieszczenia wzdłużne przekroju z prawej strony zawierają przemieszczenia przekroju jako ciała sztywnego względem płaszczyzny odniesienia. Po podstawieniu /I/ i /III/ do /II/ i uwzględnieniu, że oś y jest osią symetrii dla obu przekrojów, a oś x przechodzi przez środek ciężkości powierzchni wspólnej F , otrzymuje się

$$B - C = 0$$

oraz

$$A = \frac{I_{\Omega x}^L - I_{\Omega x}^R}{I_{xx}}$$

gdzie

$$I_{\Omega x}^L = \int_F \Omega^L x dF; \quad I_{\Omega x}^R = \int_F \Omega^R x dF$$

$$I_{xx} = \int_F x^2 dF$$

Na podstawie warunku /1/ otrzymuje się

$$\int_F (w^R)^2 dF = \int_F (w^L)^2 dF$$

lub po podstawieniu odpowiednich zależności za w^L, w^R, A otrzymuje się ostatecznie

$$\alpha = \frac{\sqrt{I_{\Omega\Omega}^L - \frac{(I_{\Omega x}^L)^2}{I_{xx}}}}{\sqrt{I_{\Omega\Omega}^R - \frac{(I_{\Omega x}^R)^2}{I_{xx}}}}$$

gdzie wprowadzono nowe oznaczenia

$$I_{\Omega\Omega}^L = \int_F (\Omega^L)^2 dF; \quad I_{\Omega\Omega}^R = \int_F (\Omega^R)^2 dF$$

Gdyby całkowanie odbywało się po całym przekroju, np. z lewej strony, wówczas byłoby

$$\int_F \Omega^L x dF = 0$$

z definicji środka ścinania przekroju.

W większości przypadków znika $I_{\Omega x}^L$ lub $I_{\Omega x}^R$. W każdym razie są to na ogół wielkości małe. Pomijając je otrzymuje się wzór przybliżony

$$\alpha \cong \sqrt{\frac{I_{\Omega\Omega}^L}{I_{\Omega\Omega}^R}}$$

dogodny w zastosowaniach praktycznych.

W tym przypadku pomija się przemieszczenia przekroju jako ciała sztywnego i może być spełniony jedynie warunek /1/.

Załącznik D

Macierz przejścia przez przekrój.

Warunki ciągłości przemieszczeń i sił uogólnionych dla dowolnego przekroju o numerze n przedstawiono w rozdziale 4 /zależności 4.12/, skąd bezpośrednio wynika postać macierzy P_n przejścia przez przekrój

$$P_n = \begin{bmatrix} P_{yn} & 0 & \pi_{yn} \\ 0 & P_{x\varphi n} & \pi_{x\varphi n} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

gdzie: P_{yn} jest macierzą jednostkową o wymiarach 4×4

$$\pi_{yn} = \left\{ 0, 0, 0, -\frac{\bar{Q}_{yn}}{GA_y^*} \right\}$$

$$\pi_{x\varphi n} = \left\{ 0, 0, 0, -\frac{\bar{Q}_{xn}}{GA_x^*}, 0, 0, -\frac{\bar{M}_{\varphi n}}{GK^*}, -\frac{b^* \bar{T}_n}{GK^*} \right\}$$

WYDAWCA: Centrum Techniki Okrętowej – BOINTE PO
Gdańsk, ul. Wały Piastowskie 1

KOLEGIUM REDAKCYJNE:

Redaktor naczelny:	mgr inż. K. Sokołowski
Z-ca redaktora naczelnego:	mgr inż. W. Majewski
Redaktorzy działów:	mgr inż. W. Łojek
	inż. Z. Szeler
	inż. A. Znaniński
Sekretarz redakcji:	S. Kolicki
Redaktor stylistyczny:	E. Gorzelańska

Powielono w CTO, nakład 150 egz., zam. nr 9945 R